Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________________

Skupina: ______________________________

Příklad	1	2	3	**Celkem bodů**
Bodů	35	30	35	100
Získáno				

[35] 1. Pomocí integrace vhodné komplexní funkce spočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)(x-\pi)} \mathrm{d}x,$$

přičemž integrál chápeme ve smyslu hlavní hodnoty.

Řešení:

Integrál spočteme standardním postupem, nejprve si uvědomíme, že ve smyslu hlavní hodnoty platí

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)(x-\pi)} \mathrm{d}x = \Im \left(\int_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{(t^2+1)(t-\pi)} \mathrm{d}t \right).$$

Pro pozdější použití si označme

$$J =_{\mathrm{def}} \int_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{(t^2+1)(t-\pi)} \mathrm{d}t.$$

Z uvedeného plyne, že hledaný integrál můžeme zkusit spočíst pomocí integrace funkce

$$f(z) =_{\mathrm{def}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)(z-\pi)}$$

přes křivku $\boldsymbol{\gamma}_{R,\varepsilon} =_{\mathrm{def}} \boldsymbol{\gamma}^1_{R,\varepsilon} + \boldsymbol{\gamma}^2_{R,\varepsilon} + \boldsymbol{\gamma}^3_{R,\varepsilon} + \boldsymbol{\gamma}^4_{R,\varepsilon}$ naznačenou na Obrázku 1 a následným limitním přechodem $R \to +\infty$ a $\varepsilon \to 0+$. Parametrizace jednotlivých křivek jsou

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma}^1_{R,\varepsilon}: &\quad z = t, &\quad t \in [-R, \pi-\varepsilon],\\
-\boldsymbol{\gamma}^2_{R,\varepsilon}: &\quad z = \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, &\quad t \in [0, \pi],\\
\boldsymbol{\gamma}^3_{R,\varepsilon}: &\quad z = t, &\quad t \in [\pi+\varepsilon, R],\\
\boldsymbol{\gamma}^4_{R,\varepsilon}: &\quad z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, &\quad t \in [0, \pi].
\end{aligned}$$

Platí

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{\gamma}_{R,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{t=-R}^{\pi-\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{(t^2+1)(t-\pi)} \mathrm{d}t + \int_{\boldsymbol{\gamma}^2_{R,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z \\
+ \int_{t=\pi+\varepsilon}^{R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{(t^2+1)(t-\pi)} \mathrm{d}t + \int_{\boldsymbol{\gamma}^4_{R,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Provedeme-li limitní přechod $R \to +\infty$ a $\varepsilon \to 0+$, můžeme druhý integrál na pravé straně spočíst podle věty o obcházení jednonásobného pólu, která říká

> Buď funkce f meromorfní funkce v okolí bodu z_0 a buď tento bod jejím pólem násobnosti jedna. Uvažujme kladně orientovanou křivku $\boldsymbol{\gamma}_\varepsilon$, která je kruhovým obloukem o poloměru r vymezeným úhly $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, aneb
>
> $$\boldsymbol{\gamma}_\varepsilon = \left\{ z \in \mathbb{C} | \, z = z_0 + \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}s}, \, s \in [\alpha, \beta] \right\}.$$
>
> Pak platí
>
> $$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\boldsymbol{\gamma}_\varepsilon} f(z) \, \mathrm{d}z = \mathrm{i} \, (\beta - \alpha) \operatorname{Res}_{z_0} f.$$

V našem případě je $\alpha = 0$, $\beta = \pi$ a u výsledného integrálu musíme změnit znaménko, neboť pól chceme obíhat v obačném směru, než je požadováno ve větě o obcházení jednonásobného pólu. Dostaneme tedy

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\boldsymbol{\gamma}^2_{R,\varepsilon}} f(z) \, \mathrm{d}z = -\pi \mathrm{i} \operatorname{Res}_\pi f(z).$$

Od limitního přechodu dále očekáváme vymizení posledního integrálu na pravé straně, aneb

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\boldsymbol{\gamma}^4_{R,\varepsilon}} f(z) \, \mathrm{d}z = 0,$$

což se nám snad podaří ukázat pomocí Jordanova lemmatu. Celkem tedy platí

$$\lim_{R \to +\infty} \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\boldsymbol{\gamma}_{R,\varepsilon}} f(z) \, \mathrm{d}z = J - \pi \mathrm{i} \operatorname{Res}_\pi f(z)$$

Integrál na levé straně lze spočíst podle residuové věty

$$\lim_{R \to +\infty} \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\boldsymbol{\gamma}_{R,\varepsilon}} f(z) \, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{a \in A} \operatorname{Res}_a f(z),$$

kde množina A obsahuje všechny singularity funkce $f(z)$ uvnitř křivky $\boldsymbol{\gamma}_{R,\varepsilon}$, což je v limitě horní polorovina. Funkce f má v horní polorovině jen jeden pól násobnosti jedna a sice v bodě i. Z residuové věty tudíž plyne

$$\lim_{R \to +\infty} \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\boldsymbol{\gamma}_{R,\varepsilon}} f(z) \, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \operatorname{Res}_{\mathrm{i}} f(z).$$

Odkud dostaneme rovnost

$$J = \pi \mathrm{i} \operatorname{Res}_\pi f(z) + 2\pi \mathrm{i} \operatorname{Res}_{\mathrm{i}} f(z).$$

Zbývá tedy spočíst residua v příslušných bodech a ověřit splnění předpokladů Jordanova lemmatu. Věnujme se nejprve Jordanovu lemmatu. Lemma říká:

Buď $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ a uvažujme funkci f spojitou na množině $A = \left\{z \in \mathbb{C} |\, z = Re^{is}, R > \rho,\ s \in [\alpha, \beta]\right\}$, kde $\rho \in \mathbb{R}^+$ je dané kladné reálné číslo. Označme

$$M_R =_{\text{def}} \max_{z \in \boldsymbol{\gamma}_R} |f(z)|\,,$$

kde křivka $\boldsymbol{\gamma}_R$ je kruhový oblouk o poloměru R vymezený úhly α a β, aneb

$$\boldsymbol{\gamma}_R = \left\{z \in \mathbb{C} |\, z = Re^{is},\ s \in [\alpha, \beta]\right\}.$$

Pak platí:

1. Je-li $\lim_{R \to +\infty} RM_R = 0$, pak $\lim\limits_{R \to +\infty} \int_{\boldsymbol{\gamma}_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.
2. Je-li $\lim_{R \to +\infty} M_R = 0$ a je-li $[\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$, pak $\lim\limits_{R \to +\infty} \int_{\boldsymbol{\gamma}_R} e^{i\delta z} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, kde $\delta > 0$ je libovolné kladné reálné číslo.

V našem případě chceme použít druhou část tvrzení, přičemž zkoumáme integrál

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\boldsymbol{\gamma}^4_{R,\varepsilon}} e^{iz} \frac{1}{(z^2 + 1)(z - \pi)}\,\mathrm{d}z.$$

Stačí tedy ověřit, že

$$\lim_{R \to +\infty} M_R = 0,$$

což ovšem snadno plyne z náledující nerovnosti

$$M_R = \max_{t \in [0,\pi]} \left| \frac{1}{(R^2 e^{2it} + 1)(Re^{it} - \pi)} \right| \leq \frac{1}{(R^2 - 1)(R - \pi)},$$

kde jsme využili důsledku trojúhelníkové nerovnosti

$$\frac{1}{|a - b|} \leq \frac{1}{||a| - |b||}.$$

Věnujme se nyní výpočtu residuí v příslušných bodech. Jak bod π tak bod i jsou jednonásobnými póly, a proto lze použít tvrzení

> Buďte $f(z)$, $g(z)$ holomorfní funkce na okolí bodu z_0 a nechť má funkce $g(z)$ v bodu z_0 kořen násobnosti jedna, pak
>
> $$\operatorname{Res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \left. \frac{f(z)}{g'(z)} \right|_{z = z_0}.$$

V našem případě tedy platí

$$\operatorname{Res}_{\pi} f(z) = \operatorname{Res}_{\pi} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)(z - \pi)} = \operatorname{Res}_{\pi} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)} \frac{1}{(z - \pi)} = \left. \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)} \right|_{z = \pi} = \frac{e^{i\pi}}{\pi^2 + 1}$$

a dále

$$\operatorname{Res}_{\mathrm{i}} f(z) = \operatorname{Res}_{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)(z-\pi)} = \operatorname{Res}_{\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z-\pi}\frac{1}{z^2+1}$$
$$= \left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z-\pi}\right|_{z=\mathrm{i}} \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{e}(\mathrm{i}-\pi)}.$$

Vratíme se zpět k původnímu problému a vidíme, že

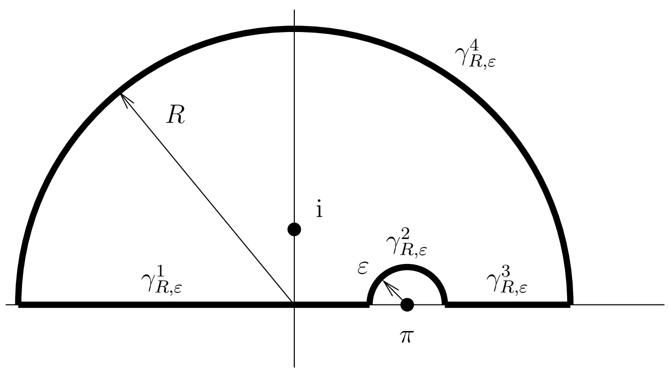
$$J = \frac{\mathrm{i}\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{\pi^2+1} + \frac{\pi}{\mathrm{e}(\mathrm{i}-\pi)},$$

aneb

$$J = -\mathrm{i}\frac{\pi}{\pi^2+1} - \frac{\pi}{\mathrm{e}(1+\pi^2)}(\pi+\mathrm{i}),$$

odkud stačí vyčíst imaginární část a konečně dostaneme číselnou hodnotu hledaného integrálu

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)(x-\pi)}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{\pi^2+1} + \frac{\pi}{\mathrm{e}(1+\pi^2)} = -\frac{\pi}{\pi^2+1}\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$



Obrázek 1: Integrační křivka pro výpočet integrálu $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)(x-\pi)}\mathrm{d}x$.

[30] 2. Pomocí integrace vhodné komplexní funkce spočtěte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\sin x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

Použijeme standardní substituci,

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2},$$
$$\sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}},$$
$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x},$$

odkud plyne $\mathrm{d}z = \mathrm{i}z\,\mathrm{d}x$. Je-li $x \in (0, 2\pi)$, pak $|z| = 1$, a integrace tedy po substituci přejde na integraci přes jednotkovou kružnici, viz Obrázek 2. Označme si

$$f(z) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{\left(5 - 3\frac{z+\frac{1}{z}}{2\mathrm{i}}\right)^2}\frac{1}{\mathrm{i}z},$$

což lze upravit do tvaru

$$f(z) = \frac{4\mathrm{i}z}{(3z^2-10\mathrm{i}z-3)^2}.$$

Po provedení substituce dostaneme

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Pro výpočet integrálu $\int_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z$ použijeme residuovou větu,

$$\int_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{a\in A}\operatorname{Res}_a f(z)$$

kde A jsou všechny singularity funkce f uvnitř jednotkové kružnice. Najděme nyní singularity funkce f. K tomu stačí vyřešit kvadratickou rovnici $3z^2-10\mathrm{i}z-3$, jejíž kořeny $z_{1,2}$ najdeme pomocí standardního vzorce

$$z_{1,2} = \frac{10\mathrm{i} \pm \sqrt{-100+36}}{6} = \begin{cases} 3\mathrm{i}, \\ \frac{\mathrm{i}}{3}. \end{cases}$$

Funkce f má tedy dva dvojnásobné póly, přičemž uvnitř jednotkové kružnice leží pouze pól v bodě $\frac{\mathrm{i}}{3}$. Spočteme residuum funkce f v tomto bodě, přičemž pro výpočet residua v dvojnásobném pólu $\frac{\mathrm{i}}{3}$ použijeme tvrzení

> Buď $f(z)$ komplexní funkce, která má v bodě z_0 pól násobnosti nejvýše n, pak
>
> $$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left((z-z_0)^n f(z)\right)\right).$$

V našem případě je $n = 2$ a platí tedy

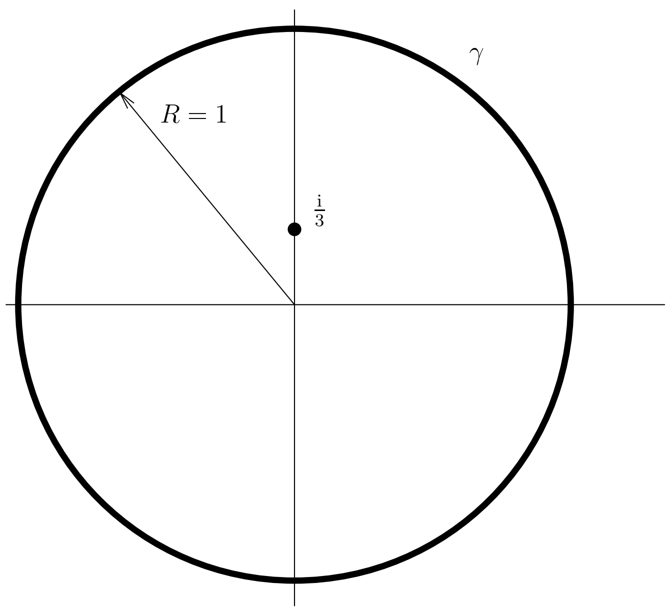
$$\operatorname{Res}_{\frac{\mathrm{i}}{3}} f(z) = \lim_{z \to \frac{\mathrm{i}}{3}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\left(z - \frac{\mathrm{i}}{3} \right)^2 \frac{4\mathrm{i}z}{9\left(z - \frac{\mathrm{i}}{3}\right)^2 (z - 3\mathrm{i})^2} \right) \right)$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{4\mathrm{i}z}{9\,(z-3\mathrm{i})^2} \bigg|_{z=\frac{\mathrm{i}}{3}} = \frac{4\mathrm{i}}{9} \left. \frac{(z-3\mathrm{i})^2 - 2z\,(z-3\mathrm{i})}{(z-3\mathrm{i})^4} \right|_{z=\frac{\mathrm{i}}{3}} = -\frac{5}{64}\mathrm{i}.$$

Celkem proto

$$\int_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{5}{64}\mathrm{i}\right) = \frac{5}{32}\pi,$$

aneb

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5 - 3\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{32}\pi.$$



Obrázek 2: Integrační křivka pro výpočet integrálu $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$.

[35] 3. Pomocí integrace vhodné komplexní funkce spočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+4)} \mathrm{d}x.$$

Řešení:

Integrál

$$I =_{\text{def}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+4)} \mathrm{d}x.$$

spočteme pomocí integrace funkce $f(z)$,

$$f(z) =_{\text{def}} \frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)}$$

přes křivku $\boldsymbol{\gamma}_R =_{\text{def}} \boldsymbol{\gamma}_R^1 + \boldsymbol{\gamma}_R^2$ naznačenou na Obrázku 3 a následným limitním přechodem $R \to +\infty$. Parametrizace jednotlivých křivek jsou

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\gamma}_R^1: \qquad && z = t, \qquad && t \in [-R, R], \\ &\boldsymbol{\gamma}_R^2: \qquad && z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \qquad && t \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

Platí

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{t=-R}^{R} \frac{1}{(t^2+1)^2(t^2+4)} \mathrm{d}t + \int_{t=0}^{\pi} \frac{1}{(R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+1)^2(R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+4)} \mathrm{d}t.$$

Integrál na levé straně lze spočíst podle residuové věty

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{a\in A} \mathrm{Res}_a\, f(z),$$

kde A jsou všechny singularity funkce f uvnitř křivky $\boldsymbol{\gamma}_R$. Funkce f má zjevně sinbularity v bodech $\pm\mathrm{i}$ a $\pm 2\mathrm{i}$, uvnitř křivky $\boldsymbol{\gamma}_R$ leží (pro dostatečně velké R) pouze body i a $2\mathrm{i}$. Bod i je pól násobnosti dva, bod $2\mathrm{i}$ je pól násobnosti jedna. Residuová věta tedy říká, že

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \left(\mathrm{Res}_{\mathrm{i}}\, f(z) + \mathrm{Res}_{2\mathrm{i}}\, f(z)\right).$$

Residua spočteme s využitím dostupných vět. Pro výpočet residua v jednonásobném pólu $2\mathrm{i}$ použijeme tvrzení

> Buďte $f(z)$, $g(z)$ holomorfní funkce na okolí bodu z_0 a nechť má funkce $g(z)$ v bodu z_0 kořen násobnosti jedna, pak
>
> $$\mathrm{Res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \left.\frac{f(z)}{g'(z)}\right|_{z=z_0}.$$

Platí tedy

$$\mathrm{Res}_{2\mathrm{i}}\, f(z) = \mathrm{Res}_{2\mathrm{i}} \frac{1}{(z^2+1)^2} \frac{1}{z^2+4} = \left.\frac{1}{(z^2+1)^2}\right|_{z=2\mathrm{i}} \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=2\mathrm{i}} = -\frac{1}{36}\mathrm{i}.$$

Pro výpočet residua v dvojnásobném pólu i použijeme tvrzení

> Buď $f(z)$ komplexní funkce, která má v bodě z_0 pól násobnosti nejvýše n, pak
>
> $$\mathrm{Res}_{z_0}\, f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \left((z-z_0)^n f(z)\right) \right).$$

V našem případě je $n = 2$, platí tedy

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{\mathrm{i}}\, f(z) &= \lim_{z\to \mathrm{i}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left((z-\mathrm{i})^2 \frac{1}{(z^2+1)^2} \frac{1}{z^2+4} \right) \right) \\
&= \lim_{z\to \mathrm{i}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left((z-\mathrm{i})^2 \frac{1}{(z-\mathrm{i})^2(z+\mathrm{i})^2} \frac{1}{z^2+4} \right) \right) = \lim_{z\to \mathrm{i}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\frac{1}{(z+\mathrm{i})^2(z^2+4)} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{(z+\mathrm{i})^4(z^2+4)^2} \left.\left(2(z+\mathrm{i})(z^2+4) + 2(z+\mathrm{i})^2 z\right)\right|_{z=\mathrm{i}} = -\frac{1}{36}\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Celkem tedy (pro dostatečně velké R) platí

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \left(-\frac{1}{36}\mathrm{i} - \frac{1}{36}\mathrm{i} \right) = \frac{\pi}{9}.$$

Na druhou stranu ovšem víme, že platí

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\boldsymbol{\gamma}_R} f(z)\,\mathrm{d}z = I + \lim_{R\to+\infty} \int_{t=0}^{\pi} \frac{1}{(R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+1)^2(R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+4)}.$$

Podaří-li se nám ukázat, že druhý integrál na pravé straně v limitě vymizí, dostaneme výsledek

$$I = \frac{\pi}{9}.$$

Zbývá ukázat, že skutečně platí

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{t=0}^{\pi} \frac{1}{(R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+1)^2(R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+4)} = 0,$$

k čemuž použijeme první část Jordanova lemmatu, které zní takto:

> Buď $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ a uvažujme funkci f spojitou na množině $A = \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\, z = R\mathrm{e}^{is}, R > \rho,\ s \in [\alpha, \beta] \right\}$, kde $\rho \in \mathbb{R}^+$ je dané kladné reálné číslo. Označme
>
> $$M_R =_{\mathrm{def}} \max_{z\in\boldsymbol{\gamma}_R} |f(z)|,$$
>
> kde křivka $\boldsymbol{\gamma}_R$ je kruhový oblouk o poloměru R vymezený úhly α a β, aneb
>
> $$\boldsymbol{\gamma}_R = \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\, z = R\mathrm{e}^{is},\ s \in [\alpha, \beta] \right\}.$$
>
> Pak platí:

1. Je-li $\lim_{R\to+\infty} RM_R = 0$, pak $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.
2. Je-li $\lim_{R\to+\infty} M_R = 0$ a je-li $[\alpha,\beta] \subset [0,\pi]$, pak $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta z} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, kde $\delta > 0$ je libovolné kladné reálné číslo.

Potřebujeme tedy dokázat, že

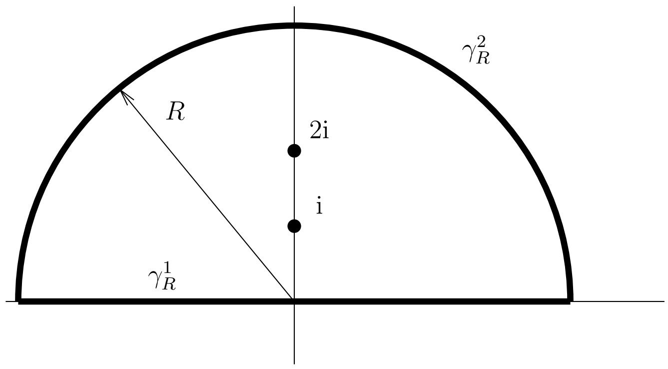
$$\lim_{R\to+\infty} RM_R = \lim_{R\to+\infty} R \max_{t=[0,\pi]} \left| \frac{1}{(R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+1)^2(R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+4)} \right| = 0.$$

To je ovšem snadné. Použijeme důsledek trojúhleníkové nerovnosti

$$\frac{1}{|a-b|} \le \frac{1}{||a|-|b||},$$

a okamžitě dostaneme požadované. Vskutku, pro dostatečně velké R platí

$$R \max_{t\in[0,\pi]} \left| \frac{1}{(R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+1)^2(R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+4)} \right| \le R\frac{1}{(R^2-1)^2(R^2-4)} \overset{R\to+\infty}{\to} 0.$$



Obrázek 3: Integrační křivka pro výpočet integrálu $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\mathrm{d}x$.