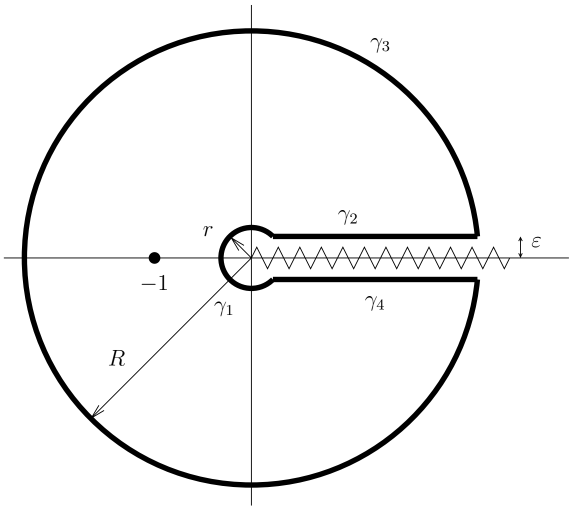
1. Dokončete výpočet integrálu
$$\int_{x=0}^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$
Připomínám, že na cvičení jsme se rozhodli použít integraci podél křivky $\boldsymbol{\gamma}$, která je načrtnuta na Obrázku 1. (Zubatá čára značí volbu polopřímky, na které má zvolená větev komplexního logaritmu nespojitost.)

Z residuové věty víme, že
$$\int_{\boldsymbol{\gamma}_1} \frac{\ln z}{(z+1)^2\sqrt{z}}\,\mathrm{d}z + \int_{\boldsymbol{\gamma}_2} \frac{\ln z}{(z+1)^2\sqrt{z}}\,\mathrm{d}z + \int_{\boldsymbol{\gamma}_3} \frac{\ln z}{(z+1)^2\sqrt{z}}\,\mathrm{d}z + \int_{\boldsymbol{\gamma}_4} \frac{\ln z}{(z+1)^2\sqrt{z}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}_{-1}\frac{\ln z}{(z+1)^2\sqrt{z}}.$$
Na cvičení jsme naznačili výpočet integrálů $\int_{\boldsymbol{\gamma}_2} \frac{\ln z}{(z+1)^2\sqrt{z}}\,\mathrm{d}z$ a $\int_{\boldsymbol{\gamma}_4} \frac{\ln z}{(z+1)^2\sqrt{z}}\,\mathrm{d}z$. (Výpočet si znovu projděte a ujistěte se, že chápete všechny dílčí kroky.) K dokončení výpočtu zbývá ukázat, že
$$\int_{\boldsymbol{\gamma}_1} \frac{\ln z}{(z+1)^2\sqrt{z}}\,\mathrm{d}z \xrightarrow{r\to 0+} 0,$$
$$\int_{\boldsymbol{\gamma}_3} \frac{\ln z}{(z+1)^2\sqrt{z}}\,\mathrm{d}z \xrightarrow{R\to \infty} 0,$$
a spočíst residuum $\mathrm{res}_{-1}\frac{\ln z}{(z+1)^2\sqrt{z}}$. (Pro výpočet residua použijte dostupné věty, konvergenci integrálu přes $\boldsymbol{\gamma}_3$ vyšetřete pomocí Jordanova lemmatu.)



Obrázek 1: Křivka $\boldsymbol{\gamma}$.

Na stránkách Josefa Málka najdete vyřešených několik vzorových příkladů na residuovou větu. Příklady nejspíše nebudeme na cvičeních podrobně počítat, pouze v případě potřeby prodiskutujeme některé dílčí kroky. Předpokládá se, že se s použitými početními technikami ve vlastním zájmu samostatně podrobně seznámíte.