Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Z přednášky víme, že časová derivace tečnných vektorů je dána vztahem

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}_\alpha}{\mathrm{d}t} = \left[\mathrm{V_\parallel}^\beta\Big|_\alpha - \mathrm{V}_\perp \mathrm{g}^{\beta\gamma}\mathrm{b}_{\gamma\alpha} \right] \mathbf{t}_\beta + \left[\frac{\partial \mathrm{V}_\perp}{\partial u^\alpha} + \mathrm{b}_{\alpha\beta}\mathrm{V_\parallel}^\beta \right] \mathbf{n}.$$

1. Ukažte, že časová derivace metrického tenzoru je dána vztahem

$$\frac{\mathrm{dg}_{\alpha\beta}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{V_\parallel}^\delta\Big|_\alpha \mathrm{g}_{\delta\beta} + \mathrm{V_\parallel}^\delta\Big|_\beta \mathrm{g}_{\delta\alpha} - 2\mathrm{V}_\perp \mathrm{b}_{\alpha\beta}$$

Na přednášce jsme zavedli pojem relativní deformace a relativního deformačního gradientu,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{x},\tau) &=_{\mathrm{def}} \boldsymbol{\chi}\left(\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x},t),\tau\right), \\ \mathbb{F}_t(\mathbf{x},\tau) &=_{\mathrm{def}} \nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{x},\tau). \end{aligned}$$

1. Ukažte, že
$$\mathbb{F}_t(\mathbf{x},\tau) = \mathbb{F}(\mathbf{X},\tau)\big|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x},t)}\, \mathbb{F}^{-1}(\mathbf{X},t)\big|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x},t)}.$$

2. Ukažte, že
$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{x},\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=t},$$
kde $\mathbf{v}$ je Euler rychlostní pole.

3. Ukažte, že
$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{F}_t(\mathbf{x},\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=t} = \mathbb{L}(\mathbf{x},t),$$
kde $\mathbb{L} =_{\mathrm{def}} \nabla\mathbf{v}$ je gradient Euler rychlostního pole.