Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Uvažujte cylindrické souřadnice v $\mathbb{R}^3$, to jest

$$x_1 = r\cos\varphi, \tag{1a}$$

$$x_2 = r\sin\varphi, \tag{1b}$$

$$x_3 = z. \tag{1c}$$

1. Najděte bázové vektory křivočaré báze $\mathbf{g}_r$, $\mathbf{g}_\varphi$ a $\mathbf{g}_z$ a bázové vektory příslušné duální báze $\mathbf{g}^r$, $\mathbf{g}^\varphi$ a $\mathbf{g}^z$. Spočtěte normy těchto vektorů.
2. Najděte složky metrického tenzoru g_{mn} a inverze k metrickému tenzoru g^{ij}.
3. Zjistěte, jaký je vztah mezi složkami vektorů v^r, v^φ a v^z vůči nenormované bázi $\mathbf{g}_r$, $\mathbf{g}_\varphi$ a $\mathbf{g}_z$ a složkami vektorů $\mathrm{v}^{\hat{r}}$, $\mathrm{v}^{\hat{\varphi}}$ a $\mathrm{v}^{\hat{z}}$ vůči normované bázi $\mathbf{g}_{\hat{r}}$, $\mathbf{g}_{\hat{\varphi}}$ a $\mathbf{g}_{\hat{z}}$ (fyzikální složky vektorů).
4. Spočtěte Christoffelovy symboly $\Gamma^m{}_{jl}$.
5. Spočtěte $\nabla\mathbf{v}$, kde $\mathbf{v} = \mathrm{v}^r\mathbf{g}_r + \mathrm{v}^\varphi\mathbf{g}_\varphi + \mathrm{v}^z\mathbf{g}_z$. Výsledek vyjádřete vůči normované bázi $\mathbf{g}_{\hat{r}}$, $\mathbf{g}_{\hat{\varphi}}$ a $\mathbf{g}_{\hat{z}}$ a s použitím složek $\mathbf{v}$ vůči normované bázi. Měli byste dospět k rovnosti

$$\nabla\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v^{\hat{r}}}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v^{\hat{r}}}{\partial\varphi} - \dfrac{v^{\hat{\varphi}}}{r} & \dfrac{\partial v^{\hat{r}}}{\partial z} \\ r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{v^{\hat{\varphi}}}{r}\right) + \dfrac{v^{\hat{\varphi}}}{r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v^{\hat{\varphi}}}{\partial\varphi} + \dfrac{v^{\hat{r}}}{r} & \dfrac{\partial v^{\hat{\varphi}}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v^{\hat{z}}}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v^{\hat{z}}}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial v^{\hat{z}}}{\partial z} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

6. Spočtěte $\operatorname{div}\mathbb{T}$, kde $\mathbb{T} = \mathrm{T}^r{}_r\mathbf{g}_r\otimes\mathbf{g}^r + \dots + \mathrm{T}^z{}_z\mathbf{g}_z\otimes\mathbf{g}^z$, aneb (vůči nenormované bázi)

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{T}^r{}_r & \mathrm{T}^r{}_\varphi & \mathrm{T}^r{}_z \\ \mathrm{T}^\varphi{}_r & \mathrm{T}^\varphi{}_\varphi & \mathrm{T}^\varphi{}_z \\ \mathrm{T}^z{}_r & \mathrm{T}^z{}_\varphi & \mathrm{T}^z{}_z \end{bmatrix}. \tag{3}$$

   Výsledek vyjádřete vůči normované bázi $\mathbf{g}_{\hat{r}}$, $\mathbf{g}_{\hat{\varphi}}$ a $\mathbf{g}_{\hat{z}}$ a s použitím složek $\mathbb{T}$ vůči normované bázi. Měli byste dospět k rovnosti

$$\operatorname{div}\mathbb{T} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\mathrm{T}^{\hat{r}}{}_{\hat{r}}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial\mathrm{T}^{\hat{r}}{}_{\hat{\varphi}}}{\partial\varphi} - \mathrm{T}^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{\varphi}} + \mathrm{T}^{\hat{r}}{}_{\hat{r}}\right) + \dfrac{\partial\mathrm{T}^{\hat{r}}{}_{\hat{z}}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\mathrm{T}^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{r}}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial\mathrm{T}^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{\varphi}}}{\partial\varphi} + \mathrm{T}^{\hat{r}}{}_{\hat{\varphi}} + \mathrm{T}^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{r}}\right) + \dfrac{\partial\mathrm{T}^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{z}}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\mathrm{T}^{\hat{z}}{}_{\hat{r}}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial\mathrm{T}^{\hat{z}}{}_{\hat{\varphi}}}{\partial\varphi} + \mathrm{T}^{\hat{z}}{}_{\hat{r}}\right) + \dfrac{\partial\mathrm{T}^{\hat{z}}{}_{\hat{z}}}{\partial z} \end{bmatrix}. \tag{4}$$