Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

1. Připomeňte si, že linearizovaná evoluční rovnice pro poruchy $\mathbf{v}'$ je

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}' \bullet \nabla)\,\mathbf{V} + (\mathbf{V} \bullet \nabla)\,\mathbf{v}' = -\nabla p' + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta \mathbf{v}'.$$

Ukažte, že aplikací operátoru divergence na evoluční rovnici pro poruchy lze odvodit diferenciální rovnici pro tlak $p'$ ve tvaru

$$-\Delta p' = 2\,(\nabla \mathbf{v}') : (\nabla \mathbf{V})^{\top}\,.$$

2. Uvažujte rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u,$$

kde $u : [\mathbf{x}, t] \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ je skalární funkce závislá na prostorové proměnné $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ a čase $t \in \mathbb{R}$. Rovnice je řešena na čtverci $\mathbf{x} \in \Omega =_{\mathrm{def}} (0, L_1) \times (0, L_2)$ s nulovými okrajovými podmínkami $u|_{\partial\Omega} = 0$. Předpokládejte, že řešení rovnice lze zapsat ve tvaru $u(\mathbf{x}, t) = \widetilde{u}(\mathbf{x})\mathrm{e}^{\omega t}$, kde $\omega \in \mathbb{R}$. Jakých hodnot může nabývat $\omega \in \mathbb{R}$? (Prosím o explicitní analytický výpočet. V případě zájmu můžete úlohu řešit i numericky.)