Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Uvažujte cylindrické souřadnice v $\mathbb{R}^3$,

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi,\\
y &= r\sin\varphi,\\
z &= z.
\end{aligned}
$$

1. Ukažte, že gradient vektorového pole $\mathbf{v}$ je vůči ortonormální bázi $\left\{\mathbf{g}_{\hat{k}}\right\}_{k=1}^{3}$ a $\left\{\mathbf{g}^{\hat{k}}\right\}_{k=1}^{3}$ dán vztahem

$$
\nabla\mathbf{v} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{r}}}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{r}}}{\partial \varphi} - \frac{\mathrm{v}^{\hat{\varphi}}}{r} & \frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{r}}}{\partial z}\\
r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathrm{v}^{\hat{\varphi}}}{r}\right) + \frac{\mathrm{v}^{\hat{\varphi}}}{r} & \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{\varphi}}}{\partial \varphi} + \frac{\mathrm{v}^{\hat{r}}}{r} & \frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{\varphi}}}{\partial z}\\
\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{z}}}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{z}}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{z}}}{\partial z}
\end{bmatrix},
$$

aneb ukažte, že

$$
\nabla\mathbf{v} = \left(\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{r}}}{\partial r}\right)\mathbf{g}_{\hat{r}}\otimes\mathbf{g}^{\hat{r}} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{r}}}{\partial \varphi} - \frac{\mathrm{v}^{\hat{\varphi}}}{r}\right)\mathbf{g}_{\hat{r}}\otimes\mathbf{g}^{\hat{\varphi}} + \cdots + \left(\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{z}}}{\partial z}\right)\mathbf{g}_{\hat{z}}\otimes\mathbf{g}^{\hat{z}}.
$$

2. Ukažte, že symetrická část gradientu vektorového pole $\mathbf{v}$ je dána vztahem

$$
\mathbb{D} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{r}}}{\partial r} & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{r}}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{\varphi}}}{\partial r} - \frac{\mathrm{v}^{\hat{\varphi}}}{r}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{r}}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{z}}}{\partial r}\right)\\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{r}}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{\varphi}}}{\partial r} - \frac{\mathrm{v}^{\hat{\varphi}}}{r}\right) & \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{\varphi}}}{\partial \varphi} + \frac{\mathrm{v}^{\hat{r}}}{r} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{\varphi}}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{z}}}{\partial \varphi}\right)\\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{r}}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{z}}}{\partial r}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{\varphi}}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{z}}}{\partial \varphi}\right) & \frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{z}}}{\partial z}
\end{bmatrix}.
$$

3. Spočtěte $\mathbb{D}$ pro vektorové pole ve tvaru $\mathbf{v} = \omega(r) r \mathbf{g}_{\hat{\varphi}}$, kde $\omega(r)$ je funkce r.

4. Buď $\mathbb{T}$ tenzorové pole. Ukažte, že divergence tenzorového pole $\mathbb{T}$ je vůči ortonormální bázi $\left\{\mathbf{g}_{\hat{k}}\right\}_{k=1}^{3}$ dána vztahem

$$
\operatorname{div}\mathbb{T} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial \mathrm{T}^{\hat{r}}{}_{\hat{r}}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \mathrm{T}^{\hat{r}}{}_{\hat{\varphi}}}{\partial \varphi} - \mathrm{T}^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{\varphi}} + \mathrm{T}^{\hat{r}}{}_{\hat{r}}\right) + \frac{\partial \mathrm{T}^{\hat{r}}{}_{\hat{z}}}{\partial z}\\
\frac{\partial \mathrm{T}^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{r}}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \mathrm{T}^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{\varphi}}}{\partial \varphi} + \mathrm{T}^{\hat{r}}{}_{\hat{\varphi}} + \mathrm{T}^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{r}}\right) + \frac{\partial \mathrm{T}^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{z}}}{\partial z}\\
\frac{\partial \mathrm{T}^{\hat{z}}{}_{\hat{r}}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \mathrm{T}^{\hat{z}}{}_{\hat{\varphi}}}{\partial \varphi} + \mathrm{T}^{\hat{z}}{}_{\hat{r}}\right) + \frac{\partial \mathrm{T}^{\hat{z}}{}_{\hat{z}}}{\partial z}
\end{bmatrix}.
$$