Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

1. Na přednášce jsme ukázali, že kovariantní derivace metrického tenzoru pro křivočaré souřednice v $\mathbb{R}^n$ je nulová

$$\mathrm{g}_{kl}\big|_m = 0.$$

Ukažte, že z definice kovariantní derivace $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ tenzoru

$$\mathrm{A}_{mn}\big|_j =_{\mathrm{def}} \frac{\partial \mathrm{A}_{mn}}{\partial \xi^j} - \mathrm{A}_{kn}\Gamma^k{}_{jm} - \mathrm{A}_{mk}\Gamma^k{}_{jn}$$

plyne, že

$$\Gamma^l{}_{nj} = \frac{1}{2}\mathrm{g}^{lm}\left(\frac{\partial \mathrm{g}_{mn}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \mathrm{g}_{jm}}{\partial \xi^n} - \frac{\partial \mathrm{g}_{nj}}{\partial \xi^m}\right).$$

(Stačí vhodným způsobem sečíst $\mathrm{g}_{kl}\big|_m$, $\mathrm{g}_{lm}\big|_k$ a $\mathrm{g}_{mk}\big|_l$.)

2. Odvoďte přímým derivováním vztah pro kovariantní derivaci $\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ tenzoru, $\mathrm{A}^{mk}\big|_j$. Aneb najděte přímým derivováním explicitní vztah pro koeficienty $\mathrm{A}^{mk}\big|_j$, pro které platí

$$\frac{\partial}{\partial \xi^j}\left(\mathrm{A}^{mk}\mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}_k\right) = \mathrm{A}^{mk}\big|_j\, \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}_k.$$

3. Vzpomeňte si, že na přednášce jsme zavedli kovariantní derivaci $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ tenzoru, $\mathrm{A}^m{}_k\big|_j$. Kromě toho jsme zavedli i operaci zvedání intexů, $\mathrm{A}^{mk} = \mathrm{g}^{kl}\mathrm{A}^m{}_l$. Použijte definici kovarinatní derivace $\mathrm{A}^m{}_k\big|_j$ a ukažte, že vztah pro kovariantní derivaci $\mathrm{A}^{mk}\big|_j$ získaný v předchozím případě je totožný se vztahem, který lze získat operací

$$\mathrm{A}^{mk}\big|_j = \left(\mathrm{g}^{kl}\mathrm{A}^m{}_l\right)\big|_j$$

a derivováním součinu. (Připomeňte si, že kovariantní derivace metrického tenzoru a kovariantní derivace inverze k metrickému tenzoru jsou nulové $\mathrm{g}^{kl}\big|_m = 0$, $\mathrm{g}_{kl}\big|_m = 0$.)