Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

1. Dokažte takzvanou redukovanou disipativní nerovnost (*reduced dissiapation inequality*), tedy nerovnost (v Euler popisu)

$$\rho\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}+\eta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)-\mathbb{T}:\mathbb{L}+\frac{1}{\theta}\mathbf{j}_q\bullet\nabla\theta\leq 0,$$

kde ψ je volná energie definovaná jako

$$\psi(\mathbf{x},t)=_{\mathrm{def}} e(\mathbf{x},t)-\theta(\mathbf{x},t)\eta(\mathbf{x},t)$$

a η značí entropii, θ teplotu, $\mathbb{T}$ Cauchy tenzor napětí, $\mathbb{L}$ gradient rychlosti a $\mathbf{j}_q$ tepelný tok. Návod: Využijte Clausius–Duhem nerovnost,

$$\rho\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}\geq-\mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{j}_q}{\theta}\right).$$

Najděte dále Lagrange variantu redukované disipativní nerovnosti, měli byste dospět k nerovnosti

$$\left(\frac{\mathrm{d}\psi_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t}+\eta_{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)-\mathbb{T}_{\mathrm{R}}:\dot{\overline{\mathbb{F}}}+\frac{1}{\theta}\mathbf{J}_q\bullet\nabla\theta\leq 0,$$

kde $\psi_{\mathrm{R}}=_{\mathrm{def}}\rho_{\mathrm{R}}\psi$, $\eta_{\mathrm{R}}=_{\mathrm{def}}\rho_{\mathrm{R}}\eta$, $\mathbb{T}_{\mathrm{R}}$ značí první Piola–Kirchhoff tenzor napětí a $\mathbb{F}$ je deformační gradient.

Předpokládejte nyní, že volná energie ψ_{R} je daný materiál funkcí pravého Cauchy–Green tenzoru, $\psi_{\mathrm{R}}=\psi_{\mathrm{R}}(\mathbb{C})$. Ukažte, že

$$\frac{\mathrm{d}\psi_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t}=2\left(\mathbb{F}\frac{\partial\psi_{\mathrm{R}}}{\partial\mathbb{C}}\right):\dot{\overline{\mathbb{F}}}.$$

Předpokládejte dále, že v daném materiálu mohou probíhat pouze izotermální procesy, aneb teplota je vždy konstantní, $\theta(\mathbf{x},t)=\theta_0$. Ukažte, že pro takovýto materiál platí

$$\mathbb{T}_{\mathrm{R}}=2\mathbb{F}\frac{\partial\psi_{\mathrm{R}}}{\partial\mathbb{C}}.$$