Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

1. Buďte u, v dostatečně hladké skalární funkce, $v : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, a buď $\mathbb{A}$ dostatečně hladké tenzorové pole $\mathbb{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^{3\times 3}$. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ omezená oblast s hladkou hranicí, ukažte, že

$$\int_\Omega (\operatorname{div} \mathbb{A}) \bullet \mathbf{v} \,\mathrm{dV} = \int_{\partial\Omega} \left(A^\top \mathbf{v}\right) \bullet \mathrm{d}\mathbf{S} - \int_\Omega \mathbb{A}^\top : \nabla \mathbf{v} \,\mathrm{dV},$$

$$\int_\Omega (\nabla u) \bullet (\nabla v) \,\mathrm{dV} = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \mathrm{dS} - \int_\Omega u \Delta v \,\mathrm{dV},$$

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) \,\mathrm{dV} = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \mathrm{dS},$$

$$\int_{\partial\Omega} \mathrm{d}\mathbf{S} = 0,$$

kde $\mathbb{A} : \mathbb{B} =_{\mathrm{def}} \operatorname{Tr}\left(\mathbb{A}\mathbb{B}^\top\right)$ a $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} =_{\mathrm{def}} (\nabla u) \bullet \mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ je vektor jednotkové vnější normály).

2. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ omezená oblast s hladkou hranicí, a buď $\mathbf{v}$ dostatečně hladké vektorové pole, které je nulové na hranici Ω, $\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0$. Ukažte, že platí

$$2 \int_\Omega \mathbb{D} : \mathbb{D} \,\mathrm{dV} = \int_\Omega \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v} \,\mathrm{dV} + \int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 \,\mathrm{dV},$$

kde $\mathbb{D}$ značí symetrickou část gradientu $\mathbf{v}$, to jest $\mathbb{D} =_{\mathrm{def}} \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\top\right)$.