

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Evoluční rovnice pro poruchu  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(y, z, t)$  základního rychlostního pole  $\mathbf{V}$  je

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v}. \quad (1)$$

Předpokládejte, že základní rychlostní pole má tvar

$$\mathbf{V}(y, z) = V^{\hat{z}}(y) \mathbf{e}_{\hat{z}} \quad (2)$$

a proveďte podrobné odvození Orr–Sommerfeld rovnice z evoluční rovnice pro poruchu  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(y, z)$ .

1. Ukažte, že

$$-\Delta p = 2\nabla \mathbf{v} : (\nabla \mathbf{V})^{\top}. \quad (3)$$

2. Ukažte, že aplikace Laplaceova operátoru na  $\mathbf{e}_{\hat{y}}$  složku rovnice (1) vede na rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta v^{\hat{y}}) + V^{\hat{z}} \frac{\partial}{\partial z} (\Delta v^{\hat{y}}) - \frac{\partial v^{\hat{z}}}{\partial z} \frac{d^2 V^{\hat{z}}}{dy^2} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta (\Delta v^{\hat{y}}). \quad (4)$$

3. Ukažte, že násada  $\mathbf{v}(y, z, t) = \tilde{\mathbf{v}}(y) e^{i(\alpha z - \omega t)}$  následně vede k transformaci parciální diferenciální rovnice (4) na obyčejnou diferenciální rovnici

$$(-i\omega + i\alpha V^{\hat{z}}) \left( \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) \tilde{v}^{\hat{y}} - i\alpha \tilde{v}^{\hat{y}} \frac{d^2 V^{\hat{z}}}{dy^2} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right)^2 \tilde{v}^{\hat{y}}, \quad (5)$$

pro  $\mathbf{e}_{\hat{y}}$  složku amplitudy  $\tilde{\mathbf{v}}(y)$ . (Což je Orr–Sommerfeld rovnice.)

4. (NEPOVINNÉ) Zkuste si rozmyslet jak výše uvedený postup zobecnit pro “trojrozměrnou” poruchu  $\mathbf{v}(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{v}}(y) e^{i(\alpha z + \beta x - \omega t)}$ . (Porucha nyní závisí i na  $x$  souřadnici.) Jak by v tomto případě vypadala rovnice (5)?

Vzhledem k tomu, že nyní zkoumáme “trojrozměrnou” poruchu, je jasné, že nám nebude stačit jedinná rovnice. Ukažte, že vhodným doplňkem obecnější verze Orr–Sommerfeld rovnice je rovnice pro  $\mathbf{e}_{\hat{y}}$  složku (amplitudy) rotace rychlostního pole  $\mathbf{v}$ ,

$$(-i\omega + i\alpha V^{\hat{z}}) \tilde{\eta}^{\hat{y}} + i\beta \tilde{v}^{\hat{y}} \frac{dV^{\hat{z}}}{dy} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) \tilde{\eta}^{\hat{y}}, \quad (6)$$

kde  $k^2 =_{\text{def}} \alpha^2 + \beta^2$  a  $\eta^{\hat{y}}(x, y, z, t) =_{\text{def}} [\text{rot } \mathbf{v}]^{\hat{y}}$ ,  $\eta^{\hat{y}}(x, y, z, t) = \tilde{\eta}^{\hat{y}}(y) e^{i(\alpha z + \beta x - \omega t)}$ .

Ukažte, že pokud známe  $\tilde{v}^{\hat{y}}$  a  $\tilde{\eta}^{\hat{y}}$ , tak je možné dopočítat  $\tilde{v}^{\hat{x}}$  a  $\tilde{v}^{\hat{z}}$ . (Použijte, viz přednáška, rovnici  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ .)