Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Uvažujte následující transformaci $z = f(\zeta)$, $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ v komplexní rovině,

$$z = c \cosh \zeta, \tag{1}$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je daný parametr, a $z = x + \mathrm{i}y$ a $\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta$ jsou komplexní čísla.

1. Ukažte, že pokud chceme transformaci popsat jako transformaci v $\mathbb{R}^2$ mezi body se souřadnicemi $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ a $\zeta = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$, pak

$$x = c \cosh \xi \cos \eta, \tag{2a}$$
$$y = c \sinh \xi \sin \eta. \tag{2b}$$

2. Ukažte, že pokud dvojici ξ a η chápeme jako křivočaré souřadnice v $\mathbb{R}^2$, které jsou vůči kartézským souřadnicím x a y zavedeny vztahem (2), pak jsou souřadnicové křivky elipsy a hyperboly.

3. Ukažte, že nenormované bázové vektory pro dané křivočaré souřadnice jsou

$$\mathbf{g}_\xi = c \begin{bmatrix} \sinh \xi \cos \eta \\ \cosh \xi \sin \eta \end{bmatrix}, \tag{3a}$$
$$\mathbf{g}_\eta = c \begin{bmatrix} -\cosh \xi \sin \eta \\ \sinh \xi cos \eta \end{bmatrix}. \tag{3b}$$

   Rozmyslete si, že výsledek lze (s lehkým zneužitím značení) zapsat ve tvaru

$$\mathbf{g}_\xi = J \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \tag{4a}$$
$$\mathbf{g}_\eta = \mathrm{i} J \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}. \tag{4b}$$

   Zneužitím značení se myslí ztotožnění reálné části s první složkou vektoru a imaginární části s druhou složkou vektoru. Ukažte, že funkce J a α jsou dány vztahy

$$J = c^2 \left(\sinh^2 \xi cos^2 \eta + \cosh^2 \xi \sin^2 \eta \right), \tag{5a}$$
$$\tan \alpha = \coth \xi \tan \eta. \tag{5b}$$

4. Ukažte, že

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} = \frac{\sinh \zeta}{\sinh \bar{\zeta}},$$

   kde $\bar{\zeta}$ je komplexně sdružené číslo k ζ.