Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

1. Předpokládejte, že pracujete s dostatečně hladkými funkcemi. Uvažujte diferenciální rovnici

$$\mathrm{D}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\chi}[\mathbf{U}] = \mathbb{R}\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}\mathbf{U}, \tag{1}$$

aneb $\frac{\partial \chi_i}{\partial \mathrm{X}_j}\mathrm{U}_j = \mathrm{R}_{im}\mathrm{C}_{mk}\mathrm{U}_k$. Ukažte, že požadavek na záměnnost parciálních derivací

$$\mathrm{D}^2_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\chi}[\mathbf{U},\mathbf{V}] = \mathrm{D}^2_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\chi}[\mathbf{V},\mathbf{U}] \tag{2}$$

vede k následující nutné podmínce pro řešitelnost rovnice (1)

$$(\mathbb{A}\mathbf{V}) \times \left(\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}\mathbf{U}\right) - (\mathbb{A}\mathbf{U}) \times \left(\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}\mathbf{V}\right) = \left(\mathrm{D}_{\mathbf{X}}\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}[\mathbf{U}]\right)\mathbf{V} - \left(\mathrm{D}_{\mathbf{X}}\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}[\mathbf{V}]\right)\mathbf{U}, \tag{3}$$

kde $\mathbb{A}$ je matice vystupující ve vztahu

$$\mathrm{D}_{\mathbf{X}}\mathbb{R}[\mathbf{U}] = \mathbb{R}j\left(\mathbb{A}\mathbf{U}\right), \tag{4}$$

a $j : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^{3\times 3}$ je operátor, který danému vektoru $\mathbf{w}$ přiřadí odpovídající antisymetrickou matici $\mathbb{B}_{\mathbf{w}}$ takovou, že $\mathbb{B}_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{v}$ platí pro libovolné $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Ukažte, že podmínku (3) lze přepsat do tvaru[1]

$$\left(\det \mathbb{C}^{\frac{1}{2}}\right)\left(\left(\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\mathbb{C}^{-\frac{1}{2}}\right)\mathbb{C}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{W}\right) \bullet (\mathbf{V}\times\mathbf{U}) - \left(\mathbb{C}^{-\frac{1}{2}}\mathbb{A}\mathbb{C}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{W}\right) \bullet (\mathbf{V}\times\mathbf{U})\right) = -\left(\left(\mathrm{rot}\,\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}\right)^{\top}\mathbf{W}\right) \bullet (\mathbf{V}\times\mathbf{U}), \tag{6}$$

kde $\mathbf{W}$ je libovolný konstantní vektor. Ukažte, že rovnice (6) je splněna pro libovolné $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ právě když

$$\mathbb{A} = \frac{1}{\det \mathbb{C}^{\frac{1}{2}}}\left(\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}\left(\mathrm{rot}\,\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}\right)^{\top}\mathbb{C}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}\left(\mathrm{rot}\,\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}\right)^{\top}\right)\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}\right). \tag{7}$$

[1] Návod: Rovnici (3) přenásobte konstantním vektorem $\mathbf{W}$. Pravou stranu upravte stejným postupem jako na přednášce. Při úpravě levé strany využijte vztahu mezi stopou a smíšeným součinem

$$\mathrm{Tr}\,\mathbb{A} = \frac{\mathbb{A}\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) + \mathbf{u}\bullet(\mathbb{A}\mathbf{v}\times\mathbf{w}) + \mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\times\mathbb{A}\mathbf{w})}{\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\times\mathbf{w})}, \tag{5}$$

který platí pro libovolnou matici $\mathbb{A}$, viz přednáška Mechanika kontinua.