[10] 30. Spočtěte plošný integrál

$$I = \int_S \mathbf{T} \mathrm{d}\mathbf{S},$$

kde vektor $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^3$ je dán přepisem

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{bmatrix},$$

a plocha $S = \partial M$ je dána jako povrch tělesa $M = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq z^2, z \in [0, h] \right\}$ a je orientována ve směru vnější normály. Integrál spočtěte:

- přímo dle definice,
- s pomocí Stokesovy věty.

Řešení:

Integrál $\int_S \mathbf{T} \mathrm{d}\mathbf{S}$ nejdříve spočteme podle Stokesovy věty, ta má v tomto případě tvar

$$\int_{\partial M} \mathbf{T} \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_M \operatorname{div} \mathbf{T} \mathrm{d}V.$$

Divergence vektorového pole $\mathbf{T}$ je

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \frac{\partial T^{\hat{x}}}{\partial x} + \frac{\partial T^{\hat{y}}}{\partial y} + \frac{\partial T^{\hat{z}}}{\partial z} = 2x + 2y + 2z = 2\left(x + y + z\right).$$

Parametrizace množiny M (množina M je zřejmě kužel, viz obrázek 12) je následujcí

$$\Phi(r, \varphi, z) = \begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = v. \end{cases}$$

kde $r \in [0, v]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, h]$. Objemový element najdeme jako determinant Jacobiho matice

$$\mathrm{d}V = \det J \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}v \mathrm{d}r = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}v \mathrm{d}r$$

$$= \det \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}v \mathrm{d}r = r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}v \mathrm{d}r.$$

Objemový integrál na pravé straně Stokesovy věty tedy je

$$2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{v=0}^{h} \int_{r=0}^{v} \left(x + y + z\right) r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}v \mathrm{d}r = 2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{v=0}^{h} \int_{r=0}^{v} \left(r\left(\cos\varphi + \sin\varphi\right) + v\right) \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}v \mathrm{d}r$$

$$= 4\pi \int_{v=0}^{h} \int_{r=0}^{v} v r \mathrm{d}v \mathrm{d}r = 4\pi \int_{v=0}^{h} \int_{r=0}^{v} v \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^v \mathrm{d}v = 2\pi \left[\frac{v^4}{4}\right]_{v=0}^{h} = \pi \frac{h^4}{2}.$$

Při přímém výpočtu bez použití Stokesovy věty postupujeme následujícím způsobem. Parametrizace hranice množiny M (což není nic jiného než kužel) rozdělíme na parametrizaci pláště a parametrizaci podstavy. Pro plášť máme kupříkladu parametrizaci

$$\Phi(r,\varphi) = \begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = r, \end{cases}$$

kde $\varphi \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, h]$. Zafixujme pořadí proměnných $[r, \varphi]$, pak je vektor $\mathrm{d}\mathbf{S}$ dán jako

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} \times \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi \\ r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektor normály míří v tomto případě dovnitř tělesa, zvolená parametrizace je tedy opačná k parametrizaci podle vnější normály – budeme muset změnit znaménko výsledného integrálu. Dále je

$$\mathbf{T} \bullet \mathrm{d}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{bmatrix} \bullet r \begin{bmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^2\cos^2\varphi \\ r^2\sin^2\varphi \\ r^2 \end{bmatrix} \bullet r \begin{bmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 1 \end{bmatrix} = -r^3\left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right) + r^3.$$

Pro hledaný integrál tudíž konečně dostaneme vyjádření

$$\int_{\text{plášť}} \mathbf{T} \bullet \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{r=0}^{h} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(-r^3\left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right) + r^3\right) \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$
$$= \int_{r=0}^{h} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^3 \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^h = \pi\frac{h^4}{2}.$$

V konečném výsledku budeme pochopitelně tento integrál uvažovat se znaménkem minus (viz diskuse orientace). Zbývá zintegrovat přes podstavu. Parametrizace podstavy je kupříkladu

$$\Phi(r,\varphi) = \begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = h, \end{cases}$$

kde $\varphi \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, h]$. Zfixujme pořadí proměnných $[r, \varphi]$, pak je vektor $\mathrm{d}\mathbf{S}$ dán jako

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} \times \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektor normály míří vně tělesa a parametrizace tedy odpovídá orientaci podle vnější normály. Dále je

$$\mathbf{T} \bullet \mathrm{d}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{bmatrix} \bullet r \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^2\cos^2\varphi \\ r^2\sin^2\varphi \\ h^2 \end{bmatrix} \bullet r \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = rh^2.$$

Spočteme integrál

$$\int \text{podstava}\mathbf{T} \bullet \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{r=0}^{h} \int_{\varphi=0}^{2\pi} rh^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}h = 2\pi h^2 \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{h} = \pi h^4,$$

výsledek integrace přes podstavu sečteme s výsledkem integrace přes plášť

$$\int_{\partial M} \mathbf{T} \bullet \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\text{plášť}} \mathbf{T} \bullet \mathrm{d}\mathbf{S} + \int_{\text{podstava}} \mathbf{T} \bullet \mathrm{d}\mathbf{S} = -\pi \frac{h^4}{2} + \pi h^4 = \pi \frac{h^4}{2},$$

což je kupodivu totéž jako když jsme počítali pomocí Stokesovy věty.