Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Dne 26. listopadu se nekoná přednáška ani cvičení!

1. Uvažujte polární souřadný systém v $\mathbb{R}^2$, to jest vztah mezi $[x, y]$ (souřadnice bodu $\mathbf{x}$ v kartézskému souřadnému systému) a $[r, \varphi]$ (souřadnice bodu $\mathbf{x}$ vůči polárnímu souřadnému systému) je

$$x = r\cos\varphi, \tag{1a}$$
$$y = r\sin\varphi. \tag{1b}$$

Buď $\phi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ skalární funkce a buď $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ vektorová funkce (vektorové pole). V kartézských souřadnicích zvládneme spočíst $\nabla\phi$, $\nabla\mathbf{v}$ a $\operatorname{div}\mathbf{v}$. Najděte vyjádření těchto operací v polárním souřadném systému. (*Použijte libovolný vám známý postup.* Samozřejmě kromě prostého opsání výsledných vzorců z nějaké učebnice. Smyslem domácího úkolu je připravit se na diskusi na následujícím cvičení.)

Nápověda. Co vlastně chceme? Vektor $\mathbf{v}$ můžeme zapsat jednak vůči kartézské bázi

$$\mathbf{v} = v^{\hat{x}}(x, y)\mathbf{e}_{\hat{x}} + v^{\hat{y}}(x, y)\mathbf{e}_{\hat{y}}, \tag{2}$$

kde $\mathbf{e}_{\hat{x}}$ a $\mathbf{e}_{\hat{y}}$ značí vektory ortonormální báze a $v^{\hat{x}}$, $v^{\hat{y}}$ jsou složky vektoru $\mathbf{v}$ vůči této bázi. Kromě toho můžeme vektor $\mathbf{v}$ zapsat i v ortonormální bázi tvořené vektory $\mathbf{e}_{\hat{r}}$, $\mathbf{e}_{\hat{\varphi}}$, tedy

$$\mathbf{v} = v^{\hat{r}}(r, \varphi)\mathbf{e}_{\hat{r}} + v^{\hat{\varphi}}(r, \varphi)\mathbf{e}_{\hat{\varphi}}, \tag{3}$$

kde $v^{\hat{r}}$ a $v^{\hat{\varphi}}$ jsou složky vektoru vůči této bázi. (Podívejte se na obrázek.) Vztah mezi oběma bázemi je zřejmý, a sice

$$\mathbf{e}_{\hat{r}} = \cos\varphi\,\mathbf{e}_{\hat{x}} + \sin\varphi\,\mathbf{e}_{\hat{y}}, \tag{4a}$$
$$\mathbf{e}_{\hat{\varphi}} = -\sin\varphi\,\mathbf{e}_{\hat{x}} + \cos\varphi\,\mathbf{e}_{\hat{y}}. \tag{4b}$$

Použitím těchto vztahů lze snadno nalézt vztah mezi složkami vektoru $\mathbf{v}$ vůči bázi kartézského souřadného systému $v^{\hat{x}}$, $v^{\hat{y}}$ a bázi polárního souřadného systému $v^{\hat{r}}$, $v^{\hat{\varphi}}$. Gradient vektoru dovedeme spočíst v kartézské bázi,

$$\nabla\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v^{\hat{x}}}{\partial x} & \frac{\partial v^{\hat{x}}}{\partial y} \\ \frac{\partial v^{\hat{y}}}{\partial x} & \frac{\partial v^{\hat{y}}}{\partial y} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

což přesně znamená, že

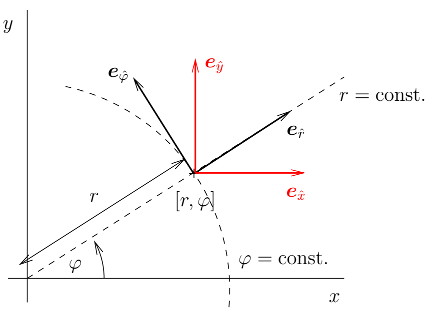
$$\nabla\mathbf{v} = \frac{\partial v^{\hat{x}}}{\partial x}\mathbf{e}_{\hat{x}} \otimes \mathbf{e}_{\hat{x}} + \frac{\partial v^{\hat{x}}}{\partial y}\mathbf{e}_{\hat{x}} \otimes \mathbf{e}_{\hat{y}} + \frac{\partial v^{\hat{y}}}{\partial x}\mathbf{e}_{\hat{y}} \otimes \mathbf{e}_{\hat{x}} + \frac{\partial v^{\hat{y}}}{\partial y}\mathbf{e}_{\hat{y}} \otimes \mathbf{e}_{\hat{y}}. \tag{6}$$

Co však chceme je vyjádření gradientu vůči bázi $\mathbf{e}_{\hat{r}}$, $\mathbf{e}_{\hat{\varphi}}$, hledáme tedy koeficienty a, b, c a d, tak, aby

$$\nabla\mathbf{v} = a\,\mathbf{e}_{\hat{r}} \otimes \mathbf{e}_{\hat{r}} + b\,\mathbf{e}_{\hat{r}} \otimes \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} + c\,\mathbf{e}_{\hat{\varphi}} \otimes \mathbf{e}_{\hat{r}} + d\,\mathbf{e}_{\hat{\varphi}} \otimes \mathbf{e}_{\hat{\varphi}}, \tag{7}$$

přičemž je žádoucí, aby koeficienty byly vyjádřené pomocí derivací složek vektoru $\mathbf{v}$ vůči polární bázi, tedy $v^{\hat{\varphi}}$ a $v^{\hat{r}}$, podle proměnných r a φ. Umíme-li derivovat složenou funkci, například $\frac{\partial v^{\hat{\varphi}}(r,\varphi)}{\partial x} = \frac{\partial v^{\hat{\varphi}}(r,\varphi)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v^{\hat{\varphi}}(r,\varphi)}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ a víme-li, jak převádět složky vektorů mezi oběma bázemi a jaký je vztah mezi bázovými vektory, je jasné, že s vynaložením dostatečného úsilí je možné koeficienty a, b, c a d nalézt.

(Existuje samozřejmě rozumnější – menší spotřeba papíru – postup, ale výše naznačený postup ukazuje jádro problému.)



Obrázek 1: Bázové vektory.