Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

1. Uvažujte Cauchyho tenzor napětí v $\mathbb{R}^2$. Cauchyho tenzor napětí má tedy vůči nějaké bázi reprezentaci

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{T}_{\hat{x}\hat{x}} & \mathrm{T}_{\hat{x}\hat{y}} \\ \mathrm{T}_{\hat{y}\hat{x}} & \mathrm{T}_{\hat{y}\hat{y}} \end{bmatrix}.$$

Jakou orientaci musí mít ploška s jednotkovou normálou $\mathbf{n}$, aby na této plošce bylo maximální smykové napětí? Aneb jak je potřeba zvolit $\mathbf{n}$ aby výraz

$$|\mathbb{T}\mathbf{n} - ((\mathbb{T}\mathbf{n}) \bullet \mathbf{n})\,\mathbf{n}|$$

nabýval maximální možné hodnoty?

Drobná nápověda. Ukažte, že

$$|\mathbb{T}\mathbf{n} - ((\mathbb{T}\mathbf{n}) \bullet \mathbf{n})\,\mathbf{n}|^2 = |\mathbb{T}\mathbf{n}|^2 - |(\mathbb{T}\mathbf{n}) \bullet \mathbf{n}|^2 .$$

Cauchy tenzor napětí je symetrický tenzor a tudíž má velmi jednoduchou reprezentaci v (ortonormální) bázi tvořené vlastními vektory. Jestliže označíme λ_1 a λ_2 vlastní vektory Cachyho tenzoru napětí $\mathbb{T}$, pak, pokud $n^{\hat{x}}$, $n^{\hat{y}}$ značí složky vektoru normály vůči bázi tvořené vlastními vektory, platí

$$|\mathbb{T}\mathbf{n}|^2 - |(\mathbb{T}\mathbf{n}) \bullet \mathbf{n}|^2 = \lambda_1^2 \left(n^{\hat{x}}\right)^2 + \lambda_2^2 \left(n^{\hat{y}}\right)^2 - \left(\lambda_1 \left(n^{\hat{x}}\right)^2 + \lambda_2 \left(n^{\hat{y}}\right)^2\right)^2 .$$

Nyní stačí výraz maximalizovat vůči $n^{\hat{x}}$ a $n^{\hat{y}}$. (Nezapomeňte, že $\mathbf{n}$ je jednotková normála, což znamená, že buď musíte použít Lagrange multiplikátor vynucující vazbu $\left(n^{\hat{x}}\right)^2 + \left(n^{\hat{y}}\right)^2 = 1$, nebo si můžete vektor $\mathbf{n}$ vyložit jako vektor se složkami $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix}^\top$ a maximalizovat vůči jedinné proměnné φ.)