Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

1. Uvažujte vektorové pole $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^n}$, kde $n \in N$. Spočtěte $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}$, $\Delta\mathbf{v}$ a $\nabla \operatorname{div}\mathbf{v}$. Ověřte, že je splněna obecná identita

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v} = \nabla \operatorname{div}\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}.$$

2. Spočtěte

$$I = \int_S \mathbf{v} \bullet \mathrm{d}\mathbf{S},$$

kde vektorové pole $\mathbf{v}$ je dáno vztahem

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{bmatrix},$$

a plocha S je povrchem tělesa $V = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \le z^2, z \in [0, h]\right\}$. Spočtěte dále

$$I = \int_V \operatorname{div}\mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

a ověřte, že hodnoty obou integrálů jsou stejné.