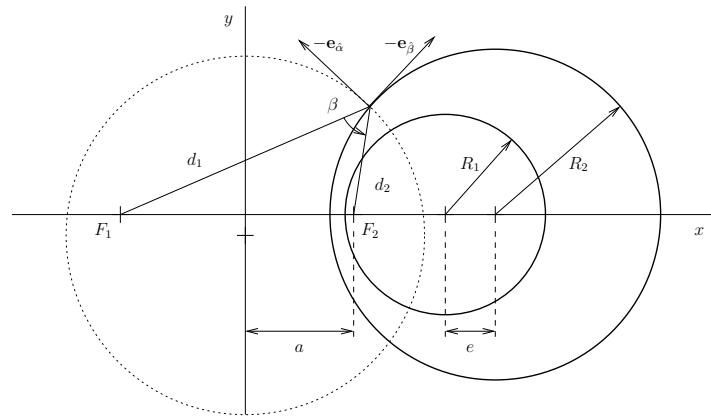


Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.



Obrázek 1: Bipolar coordinates.

1. Při popisu rovinného proudění v oblasti mezi dvěma excentricky umístěnými kružnicemi (geometrie pro „ložisko“), viz Obrázek 1, mohou být užitečné bipolární souřadnice zadané vztahy

$$x = \frac{a \sinh \alpha}{\cosh \alpha - \cos \beta},$$

$$y = \frac{a \sin \beta}{\cosh \alpha - \cos \beta}.$$

kde $\beta \in [0, 2\pi]$ a $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ a a je parametr (konstanta). Zjistěte, jak vypadá „souřadnicová síť“, tedy křivky, které dostaneme pokud zafixujeme hodnotu jedné souřadnice a druhou necháme probíhat celý definiční interval. Souřadnicové křivky najdete snadno pokud se vám podaří ukázat, že platí

$$(x - a \coth \alpha)^2 + y^2 = \frac{a^2}{\sinh^2 \alpha},$$

$$x^2 + (y - a \cot \beta)^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \beta}.$$

Najděte tečné vektory k těmto křivkám, tedy vektory \mathbf{e}_α a \mathbf{e}_β . Najděte složky metrického tenzoru g_{ij} a ověřte, že Christoffel symboly $\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha$ a $\Gamma_{\beta\beta}^\beta$ jsou dány vztahy

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha = -\frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha - \cos \beta},$$

$$\Gamma_{\beta\beta}^\beta = -\frac{\sin \beta}{\cosh \alpha - \cos \beta},$$

a že pro zbývající Christoffel symboly platí $\Gamma_{\alpha\beta}^\beta = \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha$, $\Gamma_{\beta\beta}^\alpha = -\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha$, $\Gamma_{\alpha\alpha}^\beta = -\Gamma_{\beta\beta}^\beta$, $\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha = \Gamma_{\beta\beta}^\beta$.

Jste-li dobrodružné povahy (nepovinná součást domácího úkolu), spočtěte si, jak vypadá Laplace operátor působící na skalární funkci, a zkuste si zodpovědět otázku jak vypadá elektrické pole mezi dvěma nesoustřednými nekonečně dlouhými válci drženými na konstantních potenciálech.