Příklady z mechaniky kontinua

1 Tensorová algebra a analýza

1. Dokažte větu o reprezentaci lineárních forem.

2. Ukažte, že součet tensorů $S + T$ a součin tensorů ST jsou tensory.

3. Dokažte existenci a jednoznačnost transponovaného tensoru S^T k tensoru S.

4. Dokažte:

$$\begin{aligned}
(S+T)^T &= S^T + T^T \\
(ST)^T &= T^T S^T \\
(S^T)^T &= S
\end{aligned}$$

5. Dokažte, že tensorový součin vektorů je tensor.

6. Ukažte, že:

$$\begin{aligned}
(a \otimes b)^T &\doteq (b \otimes a) \\
(a \otimes b)(c \otimes d) &= (b \cdot c) a \otimes d \\
(e_j \otimes e_j)(e_i \otimes e_i) &= \begin{cases} 0 & \text{je-li } i \neq j \\ e_i \otimes e_i & \text{pro } i = j \end{cases} \\
\sum_i e_i \otimes e_i &= I,
\end{aligned}$$

kde e_i jsou vektory kartézské báze.

7. Dokažte:

$$\begin{aligned}
S(a \otimes b) &= (Sa) \otimes b \\
(a \otimes b)S &= a \otimes (S^T b) \\
\sum_i (Se_i) \otimes e_i &= S
\end{aligned}$$

8. Ukažte, že:

$$v = Su \text{ je ekvivalentní } v_i = \sum_j S_{ij} u_j$$

$$\begin{aligned}
(S^T)_{ij} &= S_{ji} \\
(ST)_{ij} &= \sum_k S_{ik} T_{kj} \\
(a \otimes b)_{ij} &= a_i b_j \\
S \cdot T &= \sum_{i,j} S_{ij} T_{ij}
\end{aligned}$$

9. Dokažte:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} S^T &= \operatorname{tr} S \\
\operatorname{tr} (ST) &= \operatorname{tr} (TS) \\
I \cdot S &= \operatorname{tr} S \\
R \cdot (ST) &= (S^T R) \cdot T = (RT^T) \cdot S \\
u \cdot Sv &= S \cdot (u \otimes v) \\
(a \otimes b) \cdot (u \otimes v) &= (a \cdot u)(b \cdot v)
\end{aligned}$$

10. Dokažte, že operace $S \cdot T$ je skutečně skalární součin, to jest:

$S \cdot T = T \cdot S$

$S \cdot T$ je lineární v T pro dané S

$S \cdot S \geq 0$

$S \cdot S = 0$ pouze tehdy, když $S = 0$

11. Ukažte, že

- je-li S symetrický tensor, pak

$$S \cdot T = S \cdot T^T = S \cdot \left(\frac{1}{2}(T + T^T)\right)$$

- je-li W antisymetrický tensor

$$W \cdot T = -W \cdot T^T = W \cdot \left(\frac{1}{2}(T - T^T)\right)$$

- je-li S symetrický a W antisymetrický, pak $S \cdot W = 0$
- je-li $T \cdot S = 0$ pro všechny tensory S, pak $T = 0$
- je-li $T \cdot S = 0$ pro všechny symetrické tensory S, pak T je antisymetrický
- je-li $T \cdot W = 0$ pro všechny antisymetrické tensory W, pak T je symetrický.

12. Ukažte, že stopa tensoru je rovna stopě jeho symetrické části proto také stopa antisymetrického tensoru je nula.

13. Ukažte, že platí:

$$\begin{aligned}
\det (ST) &= (\det S)(\det T) \\
\det S^T &= \det S \\
\det (S^{-1}) &= (\det S)^{-1} \\
(ST)^{-1} &= T^{-1} S^{-1} \\
(S^{-1})^T &= (S^T)^{-1}
\end{aligned}$$

14. Dokažte, že Q je ortogonální tensor právě když $Q^T Q = I$.

15. Ukažte, že Q je ortogonální tensor právě když $H = Q - I$ splňuje vztahy

$$H + H^T + HH^T = 0, \qquad HH^T = H^T H.$$

16. Nechť Q je ortogonální tensor a e je vektor splňující $Qe = e$.

- Ukažte, že $Q^T e = e$
- Nechť w je axiální vektor odpovídající antisymetrické části Q. Ukažte, že pak w je rovnoběžné s e.

17. Ukažte, že je-li w axiální vektor antisymetrického tensoru W, pak

$$|w| = \frac{1}{\sqrt{2}}|W|.$$

18. Nechť D je symterický, pozitivně definitní a Q ortogonální. Ukažte, že QDQ^T je též symetrický, pozitivně definitní.

19. Určete spektrum, charakteristické prostory a spektrální rozklad pro následující tensory:

$$\begin{aligned} A &= \alpha I + \beta m \otimes m \\ B &= m \otimes n - n \otimes m \end{aligned}$$

n a m jsou jednotkové ortonormální vektory.

20. Dokažte, že pro antisymetrický tensor T platí:

- $Tu \cdot u = 0$ pro všechna u
- T nemá žádnou nenulovou vlastní hodnotu
- existuje v tak, že pro všechna u platí $Tu = v \times u$.

21. Nechť $D \in$ Sym, $Q \in$ Orth. Ukažte, že spektrum D je rovno spektru QDQ^T. Dále ukažte, že pokud je e vlastní vektor D, pak Qe je vlastní vektor QDQ^T příslušející téže vlastní hodnotě.

22. Tensor P nazýváme kolmou projekcí, pokud je P symetrický a idempotentní ($P^2 = P$).

- Nechť je n jednotkový vektor. Ukažte, že následující tensory jsou kolmé projekce:

$$I, \quad 0, \quad n \otimes n, \quad I - n \otimes n.$$

- Ukažte naopak je-li P kolmá projekce, pak P musí mít jeden z uvedených tvarů.

23. Ukažte, že tensor S (ne nutně symetrický) komutuje se všemi $W \in$ Skew, právě když $S = \omega I$.

24. Nechť $F = RU$ a $F = VR$ označuje pravý a levý rozklad $F \in \mathrm{Lin}^+$.

- Ukažte, že U a V mají stejné spektrum $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
- Ukažte, že F a R lze reprezentovat

$$\begin{aligned} F &= \sum \lambda_i \vec{f_i} \otimes \vec{e_i} \\ R &= \sum \vec{f_i} \otimes \vec{e_i} \end{aligned}$$

kde $\vec{e_i}$ jsou vlastní vektory tensoru U a $\vec{f_i}$ vlastní vektory tensoru V.

25. Najděte vlastní hodnoty pozitivně definitního tensoru, který byl získán polárním rozkladem tensoru T, jemuž v ortogonální bázi odpovídá matice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

26. Vypočítejte derivace:

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= v \cdot v \\ \varphi(v) &= e^{v^2} \\ G(A) &= A^3 \\ G(A) &= A \operatorname{tr} A \\ G(A) &= A^T A \\ G(A) &= ABA \text{ pro pevné } B \\ G(A) &= (u \cdot Au)A \text{ pro pevné } u \\ \varphi(A) &= \det(A^2) \end{aligned}$$

27. Ukažte, že:

- $(\dot{S^T}) = (\dot{S})^T$
- $(\det S)^{\cdot} = \det S \operatorname{tr}(\dot{S}S^{-1})$.

28. Ukažte, že pro $G(A) = A^{-1}$, $\det A \neq 0$, platí

$$DG(A)[H] = -A^{-1}HA^{-1}$$

29. Nechť $Q : \Re \to$ Orth je diferencovatelný. Ukažte, že pro všechna $\tau \in \Re$ je $Q(\tau)\dot{Q}(\tau)^T$ antisymetrický tensor.

30. Vypočtěte derivace hlavních invariantů tensoru S.

31. Vypočtěte první dva úplné diferenciály funkce $f(v^2)v$, kde hodnoty f jsou skaláry.

32. Nechť φ, v, w a S jsou hladká pole. Ukažte, že:

$$
\begin{aligned}
\nabla(\varphi v) &= \varphi \nabla v + v \otimes \nabla\varphi \\
\operatorname{div}(\varphi v) &= \varphi \operatorname{div} v + v \cdot \nabla\varphi \\
\nabla(v \cdot w) &= (\nabla w)^T v + (\nabla v)^T w \\
\operatorname{div}(v \otimes w) &= v \operatorname{div} w + (\nabla v) w \\
\operatorname{div}(S^T v) &= S \cdot \nabla v + v \cdot \operatorname{div} S \\
\operatorname{div}(\varphi S) &= \varphi \operatorname{div} S + S \nabla\varphi \\
\operatorname{div}((\nabla v)^T) &= \nabla(\operatorname{div} v)
\end{aligned}
$$

$\nabla w \cdot v + \nabla v \cdot w$

33. Dokažte, že vektorové pole $v(x)$ třídy C^2, které splňuje

$$\operatorname{div} v = 0, \quad \operatorname{rot} v = 0$$

je harmonické.

34. Nechť v a S jsou vektorové a tensorové hladké pole a n je vnější normála k hranici ∂R oblasti R. Dokažte na základě platnosti

$$\int_{\partial R} v \cdot n \,\mathrm{d}A = \int_R \operatorname{div} v \,\mathrm{d}V,$$

že platí

$$\int_{\partial R} S n \,\mathrm{d}A = \int_R \operatorname{div} S \,\mathrm{d}V.$$

35. Nechť φ a v jsou třídy C^2. Ukažte, že

- $\operatorname{rot} \nabla\varphi = 0$, $\quad \operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0$
- $\operatorname{div}((\nabla v) v) = \nabla v \cdot (\nabla v)^T + v \cdot (\nabla \operatorname{div} v)$
- $\nabla v \cdot (\nabla v)^T = \operatorname{div}((\nabla v) v - (\operatorname{div} v) v) + (\operatorname{div} v)^2$.

36. Nechť $r(x) = x - o$.

- Ukažte, že $\nabla r = I$.
- Nechť $e = \frac{r}{r}$, určete $(\nabla e) e$.
- Ukažte, že $u = \frac{r}{r^3}$ je harmonické pole. Najděte příslušný potenciál.

37. Nechť je R omezená regulární oblast a nechť $v, w : R \to V$ a $S : R \to \mathrm{Lin}$ jsou hladké. Ukažte, že:

- $$\int_{\partial R} v \otimes n \,\mathrm{d}A = \int_R \nabla v \,\mathrm{d}V.$$
- $$\int_{\partial R} v \cdot S n \,\mathrm{d}A = \int_R (v \cdot \operatorname{div} S + S \cdot \nabla v) \,\mathrm{d}V.$$

38. Nechť je v hladké vektorové pole na otevřené oblasti R. Ukažte, že

$$\int_{\partial P} v \cdot n \,\mathrm{d}A = 0$$

pro každou regulární oblast $P \subset R$ právě když $\operatorname{div} v = 0$.

2 Kinematika

39. Odvoďte elementárním způsobem vztah mezi deformací a posunutím ve třech dimenzích (uvažujte jen malé deformace).

40. Posunutí odpovídající rotaci tuhého tělesa kolem osy o úhel β je:

$$
\begin{aligned}
u(x, y) &= x(\cos\beta - 1) - y \sin\beta \\
v(x, y) &= x \sin\beta + y(\cos\beta - 1).
\end{aligned}
$$

Určete rotaci ω a složky deformace ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy}. Jaké jsou tyto veličiny pro malé β?

41. Uvažujte středově symetrické radiální posunutí $u(r)$. Určete deformace ϵ_r, ϵ_ϑ, $\gamma_{r\vartheta}$ vzhledem k radiální a tangenciální ose (r, ϑ) (malé deformace).

42. Určete složky ϵ_r, ϵ_ϑ, $\gamma_{r\vartheta}$ rovinné deformace (malá deformace) v polárních souřadnicích z pole posunutí $u(r, \vartheta)$, $v(r, \vartheta)$.

43. Složky deformace kovové desky homogenně deformované v rovině desky jsou vzhledem k osám x, y:

$$\epsilon_x = -200 \times 10^{-6}, \quad \epsilon_y = 1000 \times 10^{-6}, \quad \gamma_{xy} = 900 \times 10^{-6}$$

Určete:

- složky deformace vzhledem k osám x, y, které jsou otočeny ve směru hodinových ručiček o 30°
- hlavní osy a hlavní hodnoty deformace
- maximální smykovou deformaci

44. Konfigurace tělesa je dána vzhledem k referenční konfiguraci vztahy: $x_1 = p_1$, $x_2 = p_2 + \alpha p_3$, $x_3 = p_3 + \alpha p_2$, kde α je konstanta.

- vyjádřete posunutí v Lagrangeově a Eulerově formě.
- Určete polohy materiálových bodů, které v referenční konfiguraci tvoří:
  - kruh v rovině $p_1 = 0$ s hranicí $p_2^2 + p_3^2 = 1/(1 - \alpha^2)$
  - infinitesimálně malou krychli s hranami rovnoběžnými s osami souřadnic; ukažte, že jde o smyk.

45. Deformace je nazývána homogenní, dá-li se posunutí vyjádřit vztahem $u_i = \sum A_{ij} p_j$, kde A_{ij} jsou konstanty. Ukažte, že při takové deformaci roviny přecházejí v roviny a přímky v přímky. $\det(I + A) \neq 0$

46. Infinitesimální homogenní deformace je vyjádřena vztahem $u_i = A_{ij} p_j$, kde konstanty A_{ij} jsou natolik malé, že jejich součin lze zanedbat. Ukažte, že v tomto případě dvě po sobě následující deformace se sčítají a výsledná deformace nezáleží na jejich pořadí.

47. Homogenní deformace $x_1 = p_1 + \gamma p_2$, $x_2 = p_2$, $x_3 = p_3$ představuje smyk. Určete tensory F, C, B, hlavní invarianty C (nebo B) a hlavní prodloužení.

48. Vypočtěte C, B a jejich hlavní invarianty pro prodloužení o velikosti λ_i ve směru e_i.

49. Ukažte, že deformace je tuhá právě když hlavní invarianty jsou $I_C = 3$, $II_C = 3$, $III_C = 1$.

50. Nechť B je uzavřený poloprostor, $B = \{p | 0 \le p_1 < \infty\}$ a uvažujte zobrazení f na B:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{1}{p_1 + 1} \\
x_2 &= p_2 \\
x_3 &= p_3
\end{aligned}
$$

- Dokažte, že f je prosté a že $\det \nabla f > 0$.
- Vypočtěte $f(B)$ a ukažte, že f není deformace.
- Ukažte, zda platí $f(\partial B) = \partial f(B)$.

51. Nechť u a v jsou hladká pole na B a předpokládejte, že u a v odpovídají téže infinitesimální deformaci. Ukažte, že $u - v$ je pak infinitesimální tuhá deformace.

52. Střední deformace $\bar{E}$ je definována vztahem

$$\operatorname{vol}(B)\bar{E} = \int_B E \, \mathrm{dV}$$

Ukažte, že

$$\operatorname{vol}(B)\bar{E} = \frac{1}{2}\int_{\partial B} (u \otimes n + n \otimes u) \, \mathrm{dA},$$

kde u je hladké pole posunutí na B, E je odpovídající infinitesimální deformace a n je vnější normála. Výsledek znamená, že $\bar{E}$ závisí jen na hodnotách u na hranici.

53. Nechť $E = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$ a $W = \frac{1}{2}(\nabla u - (\nabla u)^T)$. Ukažte, že

$$|E|^2 + |W|^2 = |\nabla u|^2, \quad |E|^2 - |W|^2 = \nabla u \cdot (\nabla u)^T.$$

54. Dokažte Kornovu nerovnost: Nechť u je třídy C^2 a $u = 0$ na ∂B. Pak pro $E = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$

$$\int_B |\nabla u|^2 \, \mathrm{dV} \le 2\int_B |E|^2 \, \mathrm{dV}.$$

55. Z deformační funkce

$$
\begin{aligned}
x_1 &= p_1 \\
x_2 &= \frac{1}{2}(p_2 + p_3)\, e^t + \frac{1}{2}(p_2 - p_3)\, e^{-t} \\
x_3 &= \frac{1}{2}(p_2 + p_3)\, e^t - \frac{1}{2}(p_2 - p_3)\, e^{-t}
\end{aligned}
$$

určete složky pole rychlosti v Eulerově a Lagrangeově formě.

56. V elektromagnetickém kontinuu je intenzita magnetického pole $\lambda = \frac{e^{-At}}{r}$, $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, A je konstanta. Kontinuum se pohybuje rychlostí $v_1 = Bx_1x_3t$, $v_2 = Bx_2^2t^2$, $v_3 = Bx_2x_3$, B je konstanta. Určete rychlost změny intenzity magnetického pole pro částici, která se v čase $t = 1$ nachází v místě $P = (2, -1, 2)$.

57. V kontinuu se stacionární rychlostí $v = 3x_1^2x_2\vec{e}_1 + 2x_2^2x_3\vec{e}_2 + x_1x_2x_3^2\vec{e}_3$ určete rychlost prodlužování materiálové úsečky se směrem $n = \frac{1}{5}(3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_3)$ v bodě $P = (1, 1, 1)$.

58. Pole rychlosti $v(x, t) = v_1(x_2)\vec{e}_1$ představuje jednoduchý skluz. Ukažte, že

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (\operatorname{grad} v)v = 0, \quad \dot{v} = v'$$

59. Nechť D a W jsou symetrická a antisymetrická část tensoru grad v. Dokažte, že

$$\dot{C} = 2F^T DF, \quad \operatorname{div} \dot{v} = (\operatorname{div} v)^{\cdot} + |D|^2 - |W|^2.$$

60. Uvažujte pohyb definovaný vztahy:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= p_1 e^t \\
x_2 &= p_2 + t \\
x_3 &= p_3
\end{aligned}
$$

Vypočtěte prostorové pole rychlosti V a určete proudočáry.

61. Nechť je pohyb x zadán ve formě $x(y, t) = q(t) + Q(t)(y - z)$, kde z a q jsou fixní body, y libovolný bod tělesa a $Q(t) \in \mathrm{Orth}^+$. Ukažte, že x představuje tuhý pohyb.

62. Kinetická energie $K(t)$ a relativní kinetická energie $K_o(t)$ jsou definovány vztahy

$$K(t) = \frac{1}{2}\int_B v^2 \rho \, \mathrm{dV}, \quad K_o(t) = \frac{1}{2}\int_B v_o^2 \rho \, \mathrm{dV}$$

- Dokažte Königovu větu: $K = K_o + \frac{1}{2}m\dot{\alpha}^2$
- Uvažujte tuhý pohyb a užitím identity $(a \times b)^2 = a \cdot (b^2 I - b \otimes b)a$ dokažte, že $K_o = \frac{1}{2}\omega \cdot J\omega$.

3 Tensor napětí

63. Tensor napětí v bodě x je:

$$T = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Určete vektor napětí v x na plošku s normálou $n = \frac{2}{3}\vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3$, jeho velikost, jeho složku kolmo k plošce a jeho úhel k normále.

64. Jaké jsou objemové síly vyhovující rovnici rovnováhy, je-li pole napětí vyjádřeno maticí

$$T = \begin{pmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

65. Určete hlavní hodnoty a hlavní směry tensoru napětí

$$T = \begin{pmatrix} \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \end{pmatrix}.$$

$(1-\lambda)^3 - \cancel{1+1} - (1-\lambda) + 1 - (1-\lambda)$

$(1-\lambda)^3 - 1 + 2\lambda = 0$

66. Přímo a přes hlavní hodnoty najděte invarianty I_1, I_2, I_3 tensoru napětí

$$T = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

67. V případě rovinné napjatosti $T_{xx} = 110\,\mathrm{MNm}^{-2}$, $T_{yy} = 50\,\mathrm{MNm}^{-2}$, $T_{xy} = 40\,\mathrm{MNm}^{-2}$ nakreslete Mohrovu kružnici a odhadněte hlavní hodnoty a směry.

68. Ukažte, že pole rychlosti $v_i = \frac{Ax_i}{r^3}$, kde $r^2 = x_ix_i$ a A je konstanta, splňuje rovnici kontinuity pro isochorický pohyb.

69. Nechť v kontinuu působí objemové momenty (m_i na jednotku objemu). Ukažte, že rovnice rovnováhy má obvyklý tvar, ale tensor napětí je nesymetrický.

70. Rotace tuhého tělesa kolem pevného bodu má pole rychlosti $v_i = \epsilon_{ijk}\omega_j x_k$. Dokažte, že pohybové rovnice momentu hybnosti pak představují momentovou rovnici a výraz pro kinetickou energii přejde na tvar známý z dynamiky tuhého tělesa.

71. V určitém bodě kontinua jsou zadány tensor rychlosti deformace D a tensor napětí T:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Určete v tomto bodě výkon napětí $D_{ij}T_{ij}$.

72. Nechť $T_{ij} = -p\delta_{ij}$. Ukažte, že výkon napětí lze psát ve tvaru:

$$D_{ij}T_{ij} = \frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}.$$

73. Nechť povrchová síla na rovinu S odpovídající tensoru T je kolmá na S. Nechť zároveň povrchová síla odpovídající T a působící na libovolnou plochu kolmou na S je nulová. Ukažte, že T je čisté tahové napětí.

74. Nechť tensor T představuje čisté smykové napětí. Určete odpovídající hlavní napětí a hlavní směry.

75. Dokažte Signoriniho větu: ve statickém případě, t.j. div $T + b = 0$, je průměrné napětí $\bar{T}$ plně určeno povrchovými silami Tn a objemovými silami b

$$\mathrm{vol}\,(B)\bar{T} = \int_B T\,\mathrm{dV} = \int_{\partial B} T(n \otimes r)\,\mathrm{dA} + \int_B b \otimes r\,\mathrm{dV}.$$

4 Konstituční rovnice

76. Dokažte, že transformace H, pro kterou platí relace materiálové symetrie

$$f^{\infty}_{s=0}(F(t-s)) = f^{\infty}_{s=0}(F(t-s)H),$$

kde $G = f^{\infty}_{s=0}$ je celá historie, tvoří grupu.

77. Ukažte, že všestranná dilatace nemění grupu symetrie.

78. Uvažujte rozšířenou grupu symetrie κ_p elastické látky v bodě p, která je množinou všech $H \in \mathrm{Lin}^+$ splňujících

$$\hat{T}(F) = \hat{T}(FH)$$

v bodě p pro všechna $F \in \mathrm{Lin}^+$. Ukažte, že pokud κ_p není obsažena ve vlastní unimodulární grupě $\mathrm{Unim} = \{H \in \mathrm{Lin}^+ | \det H = 1\}$, pak existují posloupnosti $\{H_n\}$ a $\{G_n\}$ s $F_n, G_n \in \mathrm{Lin}^+$ takové, že

(a) $\det F_n \to \infty$, ale odezva $\hat{T}(F_n)$ zůstává stejná pro všechna n.

(b) $\det G_n \to \infty$, ale odezva $\hat{T}(F_n)$ zůstává stejná pro všechna n.

Proč tento důsledek není fyzikálně přijatelný?

5 Elastické pevné látky

79. Odvoďte konstituční rovnici pro lineární izotropní elastickou pevnou látku

$$T = \lambda(\mathrm{tr}\,\epsilon)I + 2\mu\epsilon,$$

kde λ a μ jsou tzv. Lamého konstanty, z obecné konstituční rovnice pro isotropní elastickou pevnou látku tím, že uvažujete malé deformace.

80. Odvoďte vzorec pro modul objemové stlačitelnosti K pro izotropní lineární elastickou pevnou látku,

$$K = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu).$$

Uvažujte všestranné stlačení, kdy tensor napětí je $T = -pI$.

81. Ukažte, že pro izotr pní případ přejde matice elastických konstant na tvar

$$C_{km} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

82. Vyjádřete technické elastické konstanty ν, E pomocí Lamého konstant λ, μ.

83. Dokažte, že složky posunutí

$$u_i = (\lambda + 2\mu) \sum \frac{1}{\mu(\lambda + \mu)} F_{i,jj} - \sum_j \frac{1}{\mu} F_{j,ji},$$

kde F_i jsou řešení rc nice $\nabla^4 F_i = 0$, vyhovují Navierově rovnici pro nulové obje ové síly.

84. Odvoďte rovnici Be ramiho-Michella. Uvažujte potenciální objemové síly, tj. $b_i = \varphi_{,i}$.

6 Tekutiny

85. Napište konstituční ovnici pro newtonovskou tekutinu s nulovou objemovou vazkostí.

86. Odvoďte výraz pro kon tr (TD) pro newtonovskou tekutinu.

87. Najděte celkovou p rchovou sílu působící na povrch newtonovské tekutiny o objemu V. Uvažujte n lovou objemovou viskozitu.

88. Při dvourozměrném čení, které je rovnoběžné s rovinou x_1, x_2, je složka rychlos v_3 rovna nule a v_1, v_2 n závislé na x_3. Nalezněte pro tento případ Navierovu-Stokesovu rovnici a rovnici kon inuity pro nestlačitelnou tekutinu.

89. Velká nádoba s nesti čitelnou kapalinou se pohybuje s konstantním zrychlením $\vec{a} = a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ v gravitač ím poli, které je rovnoběžné s $\vec{e}_3$. Určete sklon volného pov chu kapaliny v nádobě.