Jméno: ____________________

1. Buď $\mathbf{v}$ potenciální rychlostní pole, $\mathbf{v} = \nabla\varphi$. Ukažte, že pro materiálové zrychlení $\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$ platí

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}\right).$$

Řešení:

Definice materiálové derivace jest

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \bullet \nabla)\,\mathbf{v},$$

dosazením $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\nabla\varphi}{\partial t} + (\nabla\varphi \bullet \nabla)\,\nabla\varphi = \nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\nabla\varphi \bullet \nabla)\,\nabla\varphi = \nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\,(\nabla\varphi \bullet \nabla\varphi) = \nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\,(\nabla\varphi \bullet \nabla\varphi)\right) = \nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}\right).$$

2. Ukažte, že v případě rovinné deformace $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$ dané předpisem

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(X_1, X_2), \\ x_2 &= f_2(X_1, X_2), \\ x_3 &= X_3, \end{aligned}$$

je jedno z vlastních čísel λ_1 čisté deformace $\mathbb{U}$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}\mathbb{U}$, rovné jedné. Ukažte dále, že deformace je isochorická právě když pro zbývající vlastní čísla λ_2, λ_3 platí $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_3}$.

Řešení:

Dle definice je

$$\mathbb{F} = \frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a $\mathbb{U} = \mathbb{F}^\top\mathbb{F}$, tedy

$$\mathbb{U} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial X_1}\right)^2 & \frac{\partial f_1}{\partial X_1}\frac{\partial f_1}{\partial X_2} + \frac{\partial f_2}{\partial X_1}\frac{\partial f_2}{\partial X_2} & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial X_1}\frac{\partial f_1}{\partial X_2} + \frac{\partial f_2}{\partial X_1}\frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial X_2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vlastní čísla $\mathbb{U}$ určíme řešením rovnice

$$\det(\mathbb{U} - \lambda\mathbb{I}) = 0,$$

což v našem případě vede na rovnici

$$\begin{aligned} &\det\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial X_1}\right)^2 - \lambda & \frac{\partial f_1}{\partial X_1}\frac{\partial f_1}{\partial X_2} + \frac{\partial f_2}{\partial X_1}\frac{\partial f_2}{\partial X_2} & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial X_1}\frac{\partial f_1}{\partial X_2} + \frac{\partial f_2}{\partial X_1}\frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial X_2}\right)^2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \\ &\qquad = (1 - \lambda)\det\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial X_1}\right)^2 - \lambda & \frac{\partial f_1}{\partial X_1}\frac{\partial f_1}{\partial X_2} + \frac{\partial f_2}{\partial X_1}\frac{\partial f_2}{\partial X_2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial X_1}\frac{\partial f_1}{\partial X_2} + \frac{\partial f_2}{\partial X_1}\frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial X_2}\right)^2 - \lambda \end{bmatrix} = 0, \end{aligned}$$

z čehož je zjevné, že $\lambda = 1$ je skutečně řešením charakteristické rovnice a tedy vlastním číslem $\mathbb{U}$.

Definice isochorické deformace je $\det\mathbb{F} = 1$, užijeme-li rozklad $\mathbb{F} = \mathbb{R}\mathbb{U}$, vidíme, že

$$\det\mathbb{F} = \det\mathbb{R}\det\mathbb{U} = \det\mathbb{U} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

kde jsme využili toho, že $\det\mathbb{R} = 1$ a kde $\{\lambda_i\}_{i=1}^3$ značí vlastní čísla $\mathbb{U}$. Předchozí výpočet ukázal, že jedno z vlastních čísel musí být rovné jedné, nechť je to kupříkladu λ_1, pak je $\det\mathbb{F} = \lambda_2\lambda_3$ a z podmínky na isochorickou deformaci $\det\mathbb{F} = 1$ již okamžitě plyne požadované tvrzení.

3. Ukažte, že v případě rovinného napětí splňuje napětí $\mathbb{T}$ definované prostřednictvím Airy funkce $\psi = \psi(x_1, x_2)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}_{11} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}, \\
\mathrm{T}_{22} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}, \\
\mathrm{T}_{12} &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2},
\end{aligned}
$$

rovnice rovnováhy pro nulové objemové síly.

Řešení:
Rovnice rovnováhy pro nulové objemové síly je

$$
\operatorname{div} \mathbb{T} = \mathbf{0},
$$

což po přepisu do souřadnicové podoby vede na systém rovnic

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{T}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathrm{T}_{12}}{\partial x_2} &= 0, \\
\frac{\partial \mathrm{T}_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathrm{T}_{22}}{\partial x_2} &= 0.
\end{aligned}
$$

Po dosazení za T_{ij} (tensor $\mathbb{T}$ je symetrický, $\mathrm{T}_{12} = \mathrm{T}_{21}$) dostaneme

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2}\right) &= 0, \\
-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}\right) &= 0,
\end{aligned}
$$

což je zjevně splněno pokud je možné zaměnit pořadí parciálních derivací.

4. Rychlostní pole je v Euler souřadnicích $\mathbf{x}$ zadáno vztahem

$$
\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} x_1 x_3 \\ x_2^2 t \\ x_2 x_3 t \end{bmatrix}.
$$

Cauchy tenzor napětí má tvar

$$
\mathbb{T}(\mathbf{x}, t) = \alpha \begin{bmatrix} x_1 x_2 & -x_2 x_3 & 0 \\ -x_2 x_3 & x_2^2 & -x_2 \\ 0 & -x_2 & x_3^2 \end{bmatrix},
$$

kde α je konstanta. Najděte objemovou sílu $\mathbf{f}$ tak, aby $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ a $\mathbb{T}(\mathbf{x}, t)$ byly řešením rovnice momentu hybnosti.

Řešení:
Víme, že symetrie tenzoru napětí $\mathbb{T}^\top = \mathbb{T}$ a platnost zákona zachování hybnosti vede na platnost zákona zachování momentu hybnosti. Tenzor $\mathbb{T}$ je zjevně symetrický, stačí tedy navrhnout objemovou sílu tak, aby splňovala zákon zachování hybnosti. Rovnice zákona zachování hybnosti je

$$
\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \operatorname{div} \mathbb{T} + \rho \mathbf{b}.
$$

Spočtěme tedy $\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$ a $\operatorname{div} \mathbb{T}$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \bullet \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} x_1 x_3 \\ x_2^2 t \\ x_2 x_3 t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(x_1 x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2^2 t \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 x_3 t \frac{\partial}{\partial x_3}\right) x_1 x_3 \\ \left(x_1 x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2^2 t \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 x_3 t \frac{\partial}{\partial x_3}\right) x_2^2 t \\ \left(x_1 x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2^2 t \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 x_3 t \frac{\partial}{\partial x_3}\right) x_2 x_3 t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ x_2^2 \\ x_2 x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 x_3^2 + x_1 x_2 x_3 t \\ 2 x_2^3 t^2 \\ x_2^2 x_3 t^2 + x_2^2 x_3 t^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 x_3 \left(x_3 + x_2 t\right) \\ x_2^2 \left(1 + 2 x_2 t^2\right) \\ x_2 x_3 \left(1 + 2 x_2 t^2\right) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Divergence Cauchy tenzoru napětí je

$$\operatorname{div}\mathbb{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathrm{T}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathrm{T}_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathrm{T}_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \mathrm{T}_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathrm{T}_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathrm{T}_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \mathrm{T}_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathrm{T}_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathrm{T}_{33}}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x_2 - x_3 \\ 2x_2 \\ -1 + 2x_3 \end{bmatrix}.$$

Objemová síla musí splňovat rovnici hybnosti, a proto ji zadefinujeme

$$\mathbf{b} =_{\mathrm{def}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} - \frac{\alpha}{\rho}\operatorname{div}\mathbb{T}.$$

Nyní stačí dosadit dříve spočtené a výsledkem je

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} x_1x_3\left(x_3 + x_2 t\right) \\ x_2^2\left(1 + 2x_2t^2\right) \\ x_2x_3\left(1 + 2x_2t^2\right) \end{bmatrix} - \frac{\alpha}{\rho}\begin{bmatrix} x_2 - x_3 \\ 2x_2 \\ -1 + 2x_3 \end{bmatrix}.$$

5. Archimédův zákon ve znění uváděném ve středoškolských učebnicích říká: „Těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno vztlakovou silou, jejíž velikost se rovná tíze kapaliny stejného objemu, jako je objem ponořeného tělesa.“ Dokažte toto tvrzení z „diferenciálních rovnic v mechanice kontinua“, všechny předpoklady pečlivě zformulujte!

Řešení:

Síla působící na těleso ponořené v tekutině je

$$\mathbf{F} = \int_{\partial B} \mathbb{T}\mathbf{n}\,\mathrm{dS},$$

kde ∂B značí povrch tělesa a $\mathbf{n}$ je jednotková vnější normála k povrchu tělesa. K výpočtu síly tedy potřebujeme znát pole napětí. Uvažujme nestlačitelnou newtonovskou tekutinu

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D}.$$

Pohybové rovnice popisující proudění tekutiny jsou Navier–Stokes rovnice

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0,$$
$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \operatorname{div}\mathbb{T} + \rho\mathbf{b},$$

kde ρ je hustota tekutiny.

V „zákoně“ se hovoří o tělese ponořeném do kapaliny, tedy tělese ponořeném do kapaliny, která je v klidu, $\mathbf{v} = 0$. A patrně se vše odehrává v homogenním gravitačním poli $\mathbf{b} = -g\mathbf{e}_{\hat{z}}$. Nulové rychlostní pole zjevně splňuje $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, zbývá najít řešení rovnice hybnosti. Levá strana rovnice je nulová a pravá se, pro Navier–Stokes tekutinu, zjednoduší na $-\nabla p - \rho g\mathbf{e}_{\hat{z}}$. Rovnice hybnosti rozepsaná do složek je tedy

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y},$$
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g.$$

Řešením je evidentně tlakové pole $p(x,y,z) = p_0 - \rho g z$. Síla působící na těleso je tedy

$$\mathbf{F} = \int_{\partial B} \mathbb{T}\mathbf{n}\,\mathrm{dS} = -\int_{\partial B} p\mathbb{I}\mathbf{n}\,\mathrm{dS} = -\int_{\partial B} \left(p_0 - \rho g z\right)\mathbf{n}\,\mathrm{dS}.$$

Podívejme se, jak vypadá průmět síly $\mathbf{F}$ do libovolného (konstantního) vektoru $\mathbf{t}$,

$$\mathbf{t}\bullet\mathbf{F} = -\int_{\partial B} \underbrace{\left(\left(p_0 - \rho g z\right)\mathbf{t}\right)}_{\mathbf{u}} \bullet \mathbf{n}\,\mathrm{dS}.$$

Pravá strana je vhodná k aplikaci Stokes věty,

$$-\int_{\partial B} \mathbf{u}\bullet\mathbf{n}\,\mathrm{dS} = -\int_{B} \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{dV}.$$

Lehce ukážeme, že $\operatorname{div} \mathbf{u} = (\nabla p) \bullet \mathbf{t} = -\rho g \mathbf{e}_{\hat{z}} \bullet \mathbf{t}$, a proto

$$\mathbf{t} \bullet \mathbf{F} = \int_B \rho g \mathbf{e}_{\hat{z}} \bullet \mathbf{t} \, \mathrm{dV} = \rho g \mathbf{e}_{\hat{z}} \bullet \mathbf{t} \int_B \mathrm{dV} = \rho V g \mathbf{e}_{\hat{z}} \bullet \mathbf{t},$$

kde V je objem tělesa. Rovnost platí pro libovolný konstantní vektor $\mathbf{t}$ a síla působící na těleso je tudíž

$$\mathbf{F} = \rho V g \mathbf{e}_{\hat{z}},$$

což odpovídá tvrzení „zákona“.