Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________

Skupina: ______________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Bodů	5	7	10	8	30
Získáno					

[5] 1. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4 \sin^2(\pi - 2\arctan n)}{n^2+3}.$$

Řešení:

Počítejme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4 \sin^2(\pi - 2\arctan n)}{n^2+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+3}\left(\frac{\sin(\pi - 2\arctan n)}{\pi - 2\arctan n}\right)^2 \left(\frac{\pi - 2\arctan n}{\frac{1}{n}}\right)^2,$$

nyní vše závisí na tom, zda se nám podaří spočíst limitu $\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi-2\arctan n}{\frac{1}{n}}$. To ale není těžké

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi - 2\arctan n}{\frac{1}{n}} = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}-} \frac{2\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\frac{1}{\tan y}} = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}-} \frac{2\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\cos y}\sin y = \lim_{z\to 0+} \frac{2z}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$$
$$= \lim_{z\to 0+} \frac{2z}{\cos\frac{\pi}{2}\cos z + \sin\frac{\pi}{2}\sin z}\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right) = \lim_{z\to 0+} 2\frac{z}{\sin z}\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right) = 2,$$

celkem proto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4 \sin^2(\pi - 2\arctan n)}{n^2+3} = 4.$$

[7] 2. Spočtěte

$$\int \frac{2\sqrt{x+3}-x}{2\sqrt{x+3}+x}\,\mathrm{d}x$$

Pečlivě popište definiční obor integrandu a definiční obor nalezené primitivní funkce, určete na jakém množině platí vztah $F' = f$.

Řešení:

Kvůli odmocnině musíme nutně uvažovat $x \in [-3, +\infty)$, výraz ve jmenovateli je rovný nule pouze když $x = -2$, definiční obor integrandu je tedy $x \in [-3, -2) \cup (-2, +\infty)$. Počítejme (mysleme si, že výpočet probíhá na jednom z daných intervalů)

$$\int \frac{2\sqrt{x+3}-x}{2\sqrt{x+3}+x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\sqrt{x+3}+x-2x}{2\sqrt{x+3}+x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - 2\int \frac{x}{2\sqrt{x+3}+x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = \sqrt{x+3} \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+3}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2u}\,\mathrm{d}x \\ x = u^2 - 3 \end{array} \right|$$

$$= x - 2\left(\int \frac{2u\left(u^2-3\right)}{2u+\left(u^2-3\right)}\,\mathrm{d}u\right) = x - 4\left(\int \frac{u\left(u^2-3\right)}{(u+3)(u-1)}\,\mathrm{d}u\right).$$

Jest

$$\frac{u\left(u^2-3\right)}{(u+3)(u-1)} = u - 2 + \frac{4u-6}{(u-1)(u+3)} = u - 2 + \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{u-1} + \frac{9}{2}\frac{1}{u+3}\right),$$

můžeme proto snadno spočíst zbývající integrál, jest

$$\int \frac{u\left(u^2-3\right)}{(u+3)(u-1)}\,\mathrm{d}x = \int \left(u - 2 - \frac{1}{2}\frac{1}{u-1} + \frac{9}{2}\frac{1}{u+3}\right)\mathrm{d}u = \frac{u^2}{2} - 2u - \frac{1}{2}\ln|u-1| + \frac{9}{2}\ln|u+3|,$$

celkem tedy

$$\int \frac{2\sqrt{x+3}-x}{2\sqrt{x+3}+x}\,\mathrm{d}x = x - 4\left(\frac{\sqrt{x+3}^2}{2} - 2\sqrt{x+3} - \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x+3}-1\right| + \frac{9}{2}\ln\left|\sqrt{x+3}+3\right|\right)$$

$$= -x + 8\sqrt{x+3} + 2\ln\left|\sqrt{x+3}-1\right| - 18\ln\left|\sqrt{x+3}+3\right| + C,$$

přičemž konstanta C je jiná na každém z intervalů. Primitivní funkce je definována na množině $x \in [-3,-2) \cup (-2, +\infty)$, vztah $F' = f$ platí na intervalu $(-3, -2)$ a na intervalu $(-2, +\infty)$.

[10] 3. Vyšetřete průběh následujících funkce (definiční obor, obor hodnot, prostá, sudá nebo lichá, spojitost, body nespojitosti, limity v bodech nespojitosti, diferencovatelnost, spojitost derivace, limity derivace v bodech nespojitosti derivace, monotonie, konvexní, konkávní, lokální a globální extrémy, inflexní body, tečny v inflexních bodech, asymptoty, graf).

$$f(x) = (\ln|x|)^3 - 3\ln|x|\,.$$

Vlastnosti funkce je nutné jasně odůvodnit výpočtem, vyčíst vlastnosti (rostoucí, klesající, konvexní, konkávní a podobně) z grafu funkce nestačí a za takovéto odůvodnění nebudou přiděleny body.

Řešení:

Funkce je definována pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a je zjevně sudá, není periodická. Limity v krajních bodech definičního oboru jsou

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 0\pm} f(x) = -\infty.$$

Můžeme si povšimnout, že $f(1) = 0$.

Zabývejme se pouze kladnou reálnou poloosou, vlastnosti funkce na záporné reálné polose získáme díky symetrii funkce. Spočtěme první derivaci, jest

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((\ln|x|)^3 - 3\ln|x|\right) = 3(\ln x)^2\frac{1}{x} - 3\frac{1}{x} = \frac{3}{x}\left((\ln x)^2 - 1\right),$$

derivace neexistuje v bodě $x = 0$, limity jednostranných derivací v bodě $x = 0$ jsou

$$\lim_{x\to 0\pm} f'(x) = \pm\infty,$$

derivace je nulová v bodech $\ln x = \pm 1$, tedy $x_1 = \frac{1}{e}$ a $x_2 = e$. Z průběhu první derivace lze vyčíst

$$f(x) \text{ je } \begin{cases} \text{klesající}, & x \in (-\infty, -e)\,, \\ \text{rostoucí}, & x \in \left(-e, -\frac{1}{e}\right)\,, \\ \text{klesající}, & x \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)\,, \\ \text{rostoucí}, & x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)\,, \\ \text{klesající}, & x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)\,, \\ \text{rostoucí}, & x \in (e, +\infty)\,. \end{cases}$$

Hodnota funkce v bodech, kde je derivace nulová, je $f\left(\frac{1}{e}\right) = 2$, $f(e) = -2$.

Spočtěme druhou derivaci (pracujme opět pouze s kladnými čísly)

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left((\ln|x|)^3 - 3\ln|x|\right) = -\frac{3}{x^2}\left((\ln x)^2 - 1\right) + \frac{3}{x}\left(2\frac{\ln x}{x}\right) = \frac{3}{x^2}\left(-(\ln x)^2 + 2\ln x + 1\right).$$

Druhá derivace neexistuje v bodě $x = 0$ a je nulová v bodech, které jsou řešením rovnice

$$-(\ln x)^2 + 2\ln x + 1 = 0,$$

neboli

$$-y^2 + 2y + 1 = 0,$$

kde jsme označili $y = \ln x$, řešením výše uvedené rovnice jsou zřejmě body

$$y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2},$$

v proměnné x proto

$$x_{3,4} = e^{1\pm\sqrt{2}}.$$

Hodnota funkce v těchto bodech je $f\left(e^{1\pm\sqrt{2}}\right) = \left(1 \pm \sqrt{2}\right)^3 - 3\left(1 \pm \sqrt{2}\right) = 4 \pm 2\sqrt{2}$. Z průběhu druhé derivace je zřejmé, že

$$f(x) \text{ je } \begin{cases} \text{konkávní}, & x \in \left(-\infty, -e^{1+\sqrt{2}}\right), \\ \text{konvexní}, & x \in \left(-e^{1+\sqrt{2}}, -e^{1-\sqrt{2}}\right), \\ \text{konkávní}, & x \in \left(-e^{1-\sqrt{2}}, 0\right), \\ \text{konkávní}, & x \in \left(0, e^{1-\sqrt{2}}\right), \\ \text{konvexní}, & x \in \left(e^{1-\sqrt{2}}, e^{1+\sqrt{2}}\right), \\ \text{konkávní}, & x \in \left(e^{1+\sqrt{2}}, +\infty\right). \end{cases}$$

Rovnice tečen v inflexních bodech jsou zřejmě

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\,,$$

kde $x_0 = e^{1\pm\sqrt{2}}$.

Pro kreslení grafu funkce je důležité, že $\frac{1}{e} < e^{1-\sqrt{2}} < 1 < e < e^{1+\sqrt{2}}$. Graf funkce je na Obrázku 1, z grafu vyčteme zbývající informace. Funkce nabývá lokálního maxima v bodě $x = \frac{1}{e}$, funkce nabývá lokálního minima v bodě $x = e$. Funkce není prostá. Obor hodnot je $\mathbb{R}$.

[8] 4. Napiště obecný tvar Taylorova rozvoje (s Lagrangeovým tvarem zbytku) pro funkci f v bodě z_0. Najděte Taylorův rozvoj funkce

$$f(z) = \tan z,$$

do řádu $\mathrm{o}\left(\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)$ v bodě $z_0 = \frac{\pi}{4}$. Užitím Taylorových rozvojů vhodných funkcí spočtěte limitu

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln\left(\tan x - 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)}{\sqrt{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} - 1}.$$

Řešení:

Obecný tvar Taylorova rozvoje je:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

kde $\xi \in (x_0, x)$.

Dosazením do vzorce dostaneme

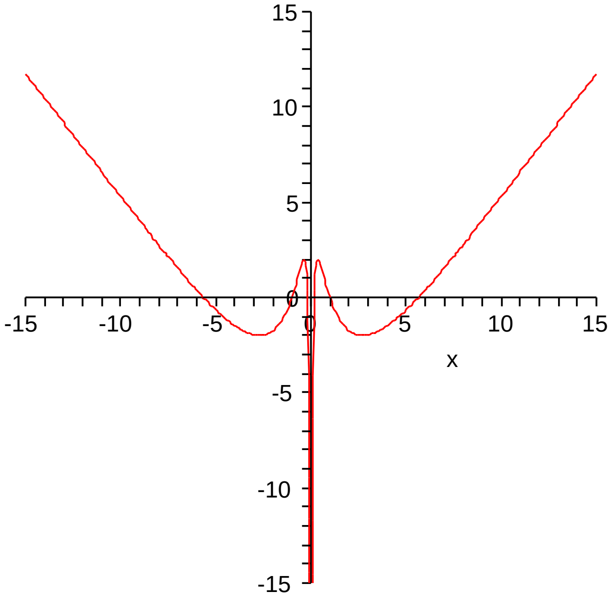
$$\begin{aligned}\tan z = \tan z\big|_{z=\frac{\pi}{4}} + \left.\frac{1}{\cos^2 z}\right|_{z=\frac{\pi}{4}}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2!}\left.\left(2\frac{1}{\cos^3 z}\sin z\right)\right|_{z=\frac{\pi}{4}}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2\right) \\ = 1 + 2\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2\right).\end{aligned}$$

K výpočtu limity použijeme následujících Taylorových rozvojů

$$\begin{aligned}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right), \\ \sqrt{1+z} &= 1 + \frac{1}{2}z + \mathrm{o}(z), \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right), \\ \ln(1+z) &= z + \mathrm{o}(z).\end{aligned}$$

Celkem

$$\begin{aligned}&\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln\left(\tan x - 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)}{\sqrt{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} - 1} \\ &= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln\left(\left(1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)\right) - \left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)\right)\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)} - 1} \\ &= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln\left(1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)\right)}{\left(1 - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)\right) - 1} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)}{-\frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)} \\ &= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\left(2 + \frac{\mathrm{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}\right)}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\left(-\frac{1}{4} + \frac{\mathrm{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}\right)} = -8.\end{aligned}$$



Obrázek 1: Graf funkce $(\ln|x|)^3 - 3\ln|x|$.