Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________

Skupina: ______________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Bodů	5	6	11	8	30
Získáno					

[5] 1. Spočtěte

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x.$$

Pečlivě popište definiční obor integrandu a definiční obor nalezené primitivní funkce, určete na jakém množině platí vztah $F' = f$.

Řešení:

Definiční obor integrandu je zjevně $(-1,0)\cup(0,1)$. Mysleme si, že výpočet probíhá na jednom z těchto intervalů. Počítejme

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \\ x=\frac{1-u^2}{1+u^2} \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{1}{2u}\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{1}{u}\frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{u}\frac{\left(1+u^2\right)^2}{4}\,\mathrm{d}x \end{array} \right|$$

$$= -\int \frac{1+u^2}{1-u^2}u\frac{4u}{\left(1+u^2\right)^2}\,\mathrm{d}u = -4\int \frac{u^2}{(1+u^2)(1-u^2)}\,\mathrm{d}u = -2\int\left(\frac{u^2}{1+u^2}+\frac{u^2}{1-u^2}\right)\mathrm{d}u,$$

spočtěme si zvlášť

$$\int \frac{u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int\left(\frac{u^2+1}{1+u^2}-\frac{1}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}u - \int\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = u - \arctan u$$

a

$$\int \frac{u^2}{1-u^2}\,\mathrm{d}u = \int\left(-\frac{1-u^2}{1-u^2}+\frac{1}{1-u^2}\right)\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}u + \int\frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$= -u + \frac{1}{2}\left(\int\frac{1}{1-u}\,\mathrm{d}u + \int\frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u\right) = -u + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|.$$

Celkem proto

$$-2\int\left(\frac{u^2}{1+u^2}+\frac{u^2}{1-u^2}\right)\mathrm{d}u = -2\left(-u+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + u - \arctan u\right) = \ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right| + 2\arctan u$$

$$= \ln\left|\frac{1-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\right| + 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

konečně proto

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

Kde konstanta C může být jiná na každém z uvažovaných intervalů. Primitivní funkce je definována na množině $x\in(-1,0)\cup(0,1)$, vztah $F' = f$ platí na intervalu $(-1,0)$ a na intervalu $(0,1)$.

[6] 2. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\left(1+\cos\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}+1}{2}\right)^n.$$

Řešení:

Počítejme

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\left(1+\cos\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}+1}{2}\right)^n = e^{\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(\frac{\left(1+\cos\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}+1}{2}\right)} = e^{\lim_{n\to+\infty} n\frac{\ln\left(\left(\frac{\left(1+\cos\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}+1}{2}-1\right)+1\right)}{\frac{\left(1+\cos\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}+1}{2}-1}\left(\frac{\left(1+\cos\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}+1}{2}-1\right)}$$

$$= e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(\left(\frac{\left(1+\cos\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}+1}{2}-1\right)+1\right)}{\frac{\left(1+\cos\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}+1}{2}-1}\frac{\left(1+\cos\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{2\frac{1}{n}}} = e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(\left(\frac{\left(1+\cos\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}+1}{2}-1\right)+1\right)}{\frac{\left(1+\cos\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}+1}{2}-1}\frac{e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\cos\frac{1}{n}\right)}-1}{\frac{1}{n}\ln\left(1+\cos\frac{1}{n}\right)}\frac{\ln\left(1+\cos\frac{1}{n}\right)}{2}}$$

$$= e^{\frac{\ln 2}{2}} = \sqrt{2}.$$

[11] 3. Vyšetřete průběh následující funkce (definiční obor, obor hodnot, prostá, sudá nebo lichá, spojitost, body nespojitosti, limity v bodech nespojitosti, diferencovatelnost, spojitost derivace, limity derivace v bodech nespojitosti derivace, monotonie, konvexní, konkávní, lokální a globální extrémy, inflexní body, tečny v inflexních bodech, asymptoty, graf).

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{1-2x}\right).$$

Řešení:

Prozkoumejme nejdříve definiční obor. Funkce $\arcsin y$ je definována pro $y \in [-1, 1]$, proto musí být

$$\left|\frac{x+1}{1-2x}\right| \le 1,$$

zřejmě

$$\frac{x+1}{1-2x} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{1}{1-2x},$$

řešením rovnice

$$\frac{x+1}{1-2x} = \pm 1$$

jsou body $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$. Vnitřní funkce je tedy hyperbola s singularitou v $x = \frac{1}{2}$ a horizontální asymptotou v $y = -\frac{1}{2}$, hyperbola protíná přímky $y = \pm 1$ v bodech $x_{1,2}$ (viz Obrázek 2). Funkce $\frac{x+1}{1-2x}$ tedy dáva hodnoty v intervalu $[-1, 1]$ pro $x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$. Definičním oborem zkoumané funkce je proto $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$.

Limity v krajních bodech definičního oboru jsou

$$\lim_{x\to 0-} \arcsin\left(\frac{x+1}{1-2x}\right) = \frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to 2+} \arcsin\left(\frac{x+1}{1-2x}\right) = -\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to +\infty} \arcsin\left(\frac{x+1}{1-2x}\right) = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) < 0,$$
$$\lim_{x\to -\infty} \arcsin\left(\frac{x+1}{1-2x}\right) = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) < 0.$$

Funkce má tedy horizontální asymptotu o rovnici $y = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Funkce je na svém definiční oboru spojitá (složení spojitých funkcí), není sudá ani lichá, není periodická. Spočtěme první derivaci, jest

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin\left(\frac{x+1}{1-2x}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{1-2x}\right)^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x+1}{1-2x}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{1-2x}\right)^2}}\frac{3}{(1-2x)^2} > 0.$$

Derivace existuje na celém vnitřku definičního oboru a je zde spojitá, limity derivace v krajních bodech definičního oboru jsou

$$\lim_{x\to 0-}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin\left(\frac{x+1}{1-2x}\right) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 2+}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin\left(\frac{x+1}{1-2x}\right) = +\infty.$$

Funkce je tedy na svém definičním oboru rostoucí, přesněji funkce je rosoucí na intervalu $(-\infty, 0]$ a na intervalu $[2, +\infty)$. Spočtěme druhou derivaci

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\arcsin\left(\frac{x+1}{1-2x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{1-2x}\right)^2}}\frac{3}{(1-2x)^2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\left(\frac{x+1}{1-2x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\left(\frac{x+1}{1-2x}\right)^2\right)\frac{3}{(1-2x)^2}$$
$$-2\frac{1}{\left(1-\left(\frac{x+1}{1-2x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{3}{(1-2x)^3}(-2) = \frac{1}{\left(1-\left(\frac{x+1}{1-2x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{x+1}{1-2x}\frac{9}{(1-2x)^4}$$
$$+12\frac{1}{\left(1-\left(\frac{x+1}{1-2x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{(1-2x)^3} = \frac{\left(4x^2-7x+1\right)\sqrt{3}}{(1-2x)^3\,x\,(x-2)\sqrt{\frac{x(x-2)}{(1-2x)^2}}}.$$

Kořeny rovnice $4x^2 - 7x + 1$ jsou $x_{3,4} = \frac{7}{8} \pm \frac{\sqrt{33}}{8}$. Funkce je tedy zjevně konvexní na intervalu $(-\infty, 0)$ a konkávní na intervalu $[2, +\infty)$. Nyní jsme schopni načrtnout graf funkce (viz Obrázek 1). Z grafu vyčteme zbývající informace: fukce je prostá, obor hodnot je $\left[-\frac{\pi}{2}, \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \cup \left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right), \frac{\pi}{2}\right]$, v bodě $x_1 = 0$ nabývá funkce globálního maxima, hodnota funkce v bodě globálního maxima je $\frac{\pi}{2}$, v bodě $x_2 = 2$ nabývá funkce globálního minima, hodnota funkce v bodě globálního minima je $-\frac{\pi}{2}$.

[8] 4. Najděte Taylorův rozvoj do řádu $o\left(y^6\right)$ funkcí $\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$ a $\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$ pro $y \to 0-$. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\left(\frac{1+\sin^2 x}{2}\right)^2}}.$$

Řešení:

Proveďme nejdříve jednoduchou substituci a zkoumejme výraz

$$\frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1+\sin^2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2}}$$

pro $y \to 0-$, oba požadované rozvoje tedy budou při výpočtu zmíněné limity nanejvýš užitečné. Jest

$$\begin{aligned}
\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\,\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}y^k}\left(\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right)\bigg|_{y=0} y^k = -y+\frac{y^3}{3!}-\frac{y^5}{5!}+o\left(y^6\right),\\
\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\,\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}y^k}\left(\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right)\bigg|_{y=0} y^k = 1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}+\frac{y^6}{6!}+o\left(y^6\right).
\end{aligned}$$

Pochopitelně jsme si mohli všimnout, že $\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin y$ a $\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right) = \cos y$ a použít známé vzorce. Pokračujme dál v hledání Taylorových rozvojů pro jednotlivé výrazy v zkoumané limitě, na náledujícím řádku vždy využíváme výsledek z řádku předchozího.

$$\begin{aligned}
\sin^2\left(y+\frac{\pi}{2}\right) &= \left(1-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{24}+o\left(y^5\right)\right)^2 = 1-y^2+\frac{y^4}{3}+o\left(y^5\right),\\
\left(\frac{1+\sin^2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2 &= 1-y^2+\frac{7}{12}y^4+o\left(y^5\right),\\
\left(1-\left(\frac{1+\sin^2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2\right) &= \left(1-\left(1-y^2+\frac{7}{12}y^4+o\left(y^5\right)\right)\right) = y^2-\frac{7}{12}y^4+o\left(y^5\right).
\end{aligned}$$

Celkem tedy

$$\frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1+\sin^2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2}} = \frac{-y+\frac{y^3}{6}-\frac{1}{120}y^5+o\left(y^5\right)}{\sqrt{y^2-\frac{7}{12}y^4+o\left(y^5\right)}} = \frac{y\left(-1+\frac{y^2}{6}-\frac{1}{120}y^4+o\left(y^5\right)\right)}{|y|\left(1-\frac{7}{12}y^2+o\left(y^4\right)\right)} \overset{y\to 0-}{=} 1.$$

Poznámka: Vyjasněte si prosím, co znamená Taylorův rozvoj funkce se středem v bodě x_0. Jste zvyklí psát

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^6\right)$$

což je Taylorův rozvoj funkce sin se středem bodě $x_0 = 0$, aneb – jinými slovy – nejlepší aproximace funkce sin polynomem v okolí bodu $x_0 = 0$, uvážíme-li první dva členy ve výše uvedeném rozvoji, situace bude vypadat tak, jako na obrázku 4.

Podívejme se nyní, co je potřeba udělat, pokud chceme znát Taylorův rozvoj funkce sin v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Nenapadne-li nás nic lepšího, musíme vyjít z obecného vzorečku, kde nyní klademe $x_0 = \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = f(x_0)+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}(x-x_0)+\frac{1}{2!}\,\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\bigg|_{x=x_0}(x-x_0)^2+o\left((x-x_0)^2\right),$$

tedy

$$\sin x = 1-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}+o\left((x-x_0)^2\right).$$

Uvážíme-li pouze první dva členy rozvoje, situace bude vypadat tak jako na obrázku 3. V žádném případě nesmíte psát nesmysly jako $\sin x = 1-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}+o\left(x^2\right)$, což bylo bohužel velmi často vidět ve zkouškové písemné práci.

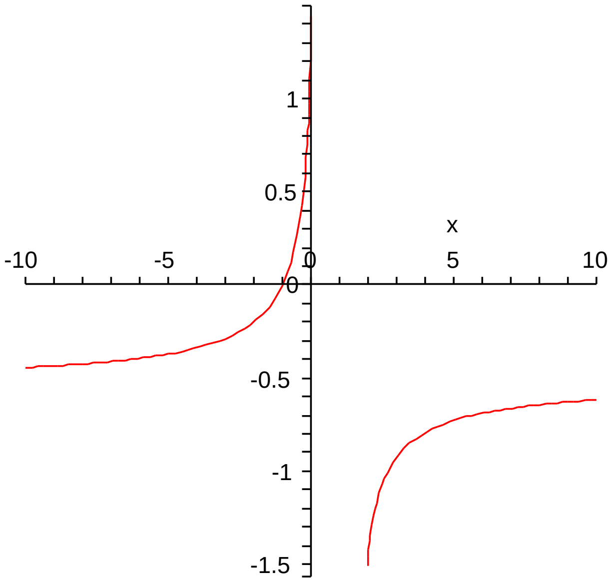
A nyní se konečně věnujme prvnímu úkolu ve výše zadaném příkladu, chceme napsat Taylorův rozvoj funkce $\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$ pro $y \to 0+$, aneb chceme prozkoumat chování zadané funkce na okolí bodu $\frac{\pi}{2}$. Je tedy potřeba dosadit za $x = y + \frac{\pi}{2}$ do posledního vzorce, což dává

$$\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{y^2}{2!} + \mathrm{o}\left(y^3\right).$$

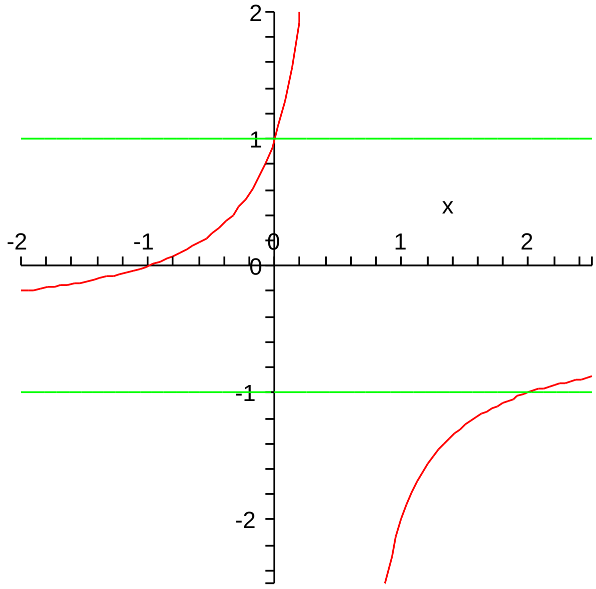
Můžete si také povšimnout, že v mnohých učebnicích je Taylorův vzorec uváděn ve tvaru

$$f(a+h) = f(a) + \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a} h + \frac{1}{2!}\left.\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=a} h^2 + \mathrm{o}\left(h^2\right),$$

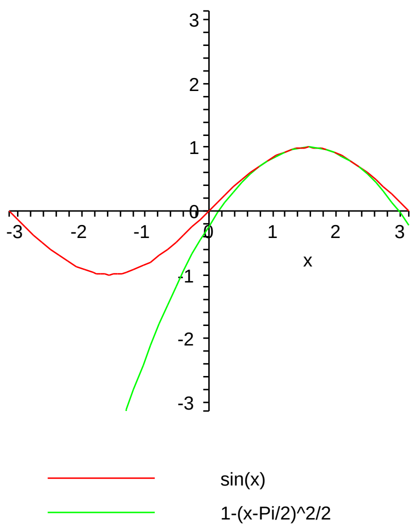
což přesně odpovídá přístupu “sedíme v bodě a a pozorujeme, co se stane, pokud s z tohoto bodu pohneme o h”. Všechny přístupy jsou samozřejmě vzájemně záměnné, stačí jen vše dobře promyslet.



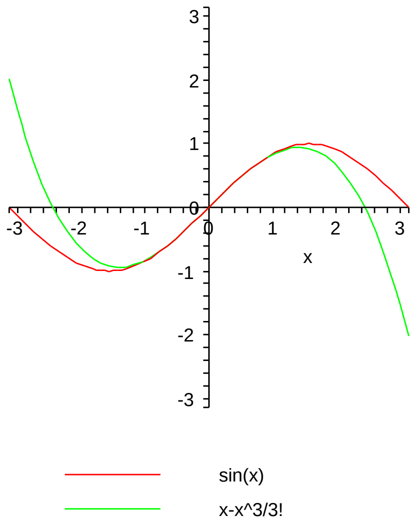
Obrázek 1: Graf funkce $\arcsin\left(\frac{x+1}{1-2x}\right)$.



Obrázek 2: Graf funkce $\frac{x+1}{1-2x}$.



Obrázek 3: Taylorův rozvoj funkce sin se středem v $\frac{\pi}{2}$, tedy $\sin x = 1 - \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \mathrm{o}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3\right)$.



Obrázek 4: Taylorův rozvoj funkce sin se středem v nule, tedy $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$.