Primitivní funkce najděte všude, kde existují. Množinu, na jaké platí vámi odvozený vztah pro primitnivní funkci přesně popište.

Jméno a příjmení: ____________________

Skupina: ____________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Celkem bodů**
Bodů	10	10	5	10	15	50
Získáno						

[10] 1.

$$\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení:

Definiční obor integrandu je zjevně $(-1,0)\cup(0,+\infty)$. Počítejme (mysleme si, že výpočet probíhá buď na intervalu $(-1,0)$ nebo na intervalu $(0,+\infty)$)

$$\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+x}{x\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{1+x} + \int \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x,$$

kde zbývající integrál spočteme kupříkladu tako

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u=\sqrt{1+x} & x=u^2-1 \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{1}{u}\mathrm{d}x & \end{matrix} \right| = \int 2\frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u-1} - \int \frac{\mathrm{d}u}{u+1} = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|$$
$$= \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|.$$

Integrál

$$\int 2\frac{\mathrm{d}u}{u^2-1}$$

lze pochopitelně spočít také užitím tabulkové primitivní funkce, jest

$$\int 2\frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} = -2\int \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \begin{cases} -2\operatorname{arctanh}(u), & |u|<1 \\ -2\operatorname{arccotanh}(u), & |u|>1 \end{cases} = \begin{cases} -2\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{1+x}\right), & x\in(-1,0), \\ -2\operatorname{arccotanh}(u), & x\in(0,+\infty). \end{cases}$$

Celkem tedy:

$$\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{1+x} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right| + C,$$

kde konstanta C může být jiná na intervalu $(-1,0)$ a na intervalu $(0,+\infty)$. Definiční obor primitivní funkce se shoduje s definičním oborem integrandu, vztah $F'=f$ platí na celém definičním oboru.

[10] 2.

$$\int \frac{x}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$$

Řešení:

Definiční obor integrandu je zřejmě $(-\infty,1)$. Počítejme

$$\int \frac{x}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u=x & u'=1 \\ v'=\frac{x}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} & v=-\frac{2}{\sqrt{1-x}} \end{matrix} \right| = -\frac{2x}{\sqrt{1-x}} + \int \frac{2}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = -\frac{2x}{\sqrt{1-x}} - 4\sqrt{1-x},$$

celkem tedy

$$\int \frac{x}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = -\frac{2x}{\sqrt{1-x}} - 4\sqrt{1-x} + C = -\frac{2x}{\sqrt{1-x}} + \frac{4}{\sqrt{1-x}} + C.$$

Definiční obor primitivní funkce se shoduje s definičním oborem integrandu, vztah $F'=f$ platí na celém definičním oboru.

[5] 3.

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$$

Řešení:

Definiční obor integrandu je zřejmě $\mathbb{R}$. Počítejme

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u = e^x \\ \mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}x\end{matrix}\right| = \int \frac{u^2}{u(u+1)}\,\mathrm{d}u = \int \frac{u}{u+1}\,\mathrm{d}u = \int \left(1 - \frac{1}{u+1}\right)\,\mathrm{d}u$$
$$= u - \ln|u+1| = e^x - \ln|e^x+1| + C.$$

Definiční obor primitivní funkce se shoduje s definičním oborem integrandu, vztah $F' = f$ platí na celém definičním oboru.

[10] 4.

$$\int \frac{1}{\sinh x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení:

Definiční obor integrandu je zřejmě $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Počítejme

$$\int \frac{1}{\sinh x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u = \tanh\frac{x}{2} \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\cosh^2\frac{x}{2} - \sinh^2\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \left(1 - \tanh^2\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = (1-u^2)\,\mathrm{d}u \\ \sinh x = 2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2} = 2\frac{\sinh\frac{x}{2}}{\cosh\frac{x}{2}}\cosh^2\frac{x}{2} = 2\frac{\tanh\frac{x}{2}}{1-\tanh^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1-u^2}\end{matrix}\right|$$
$$= \int \frac{1}{\frac{2u}{1-u^2}}\frac{2}{1-u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| = \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right|,$$

substituci $u = \tanh\frac{x}{2}$ lze, na rozdíl od substituce $u = \tan\frac{x}{2}$ používané pro integrály obsahující klasické goniometrické funkce, použít pro $x \in \mathbb{R}$.

Případně můžeme výpočet provést takto

$$\int \frac{1}{\sinh x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u = e^x \\ \mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}x\end{matrix}\right| = \int \frac{1}{\frac{u-\frac{1}{u}}{2}}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$$
$$= -2\int \frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u = -2\,\mathrm{arctanh}\,u = -2\,\mathrm{arctanh}\,e^x,$$

kde $|u| < 1$, neboli $x < 0$. Pro $|u| > 1$ bychom pochopitelně museli namísto funkce arctanh použít funkci arccotanh (podívejte se důkladně do tabulky základních primitivních funkcí). Uvedený integrál lze také spočíst rozkladem na parciální zlomky.

Celkem tedy

$$\int \frac{1}{\sinh x}\,\mathrm{d}x = \ln|\tanh\frac{x}{2}| + C,$$

kde konstanta C může být jiná na intervalu $(-\infty, 0)$ a na intervalu $(0, +\infty)$. Definiční obor primitivní funkce se shoduje s definičním oborem integrandu, vztah $F' = f$ platí na celém definičním oboru.

[15] 5.

$$\int \frac{1}{3 + 2\sin x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení:

Buď $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a > b$. Počítejme

$$\int \frac{1}{a + b\sin x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} y = \tan\frac{x}{2} & x \in (-\pi,\pi) + 2k\pi \\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(1+y^2\right)\,\mathrm{d}x & \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}} = \frac{2y}{1+y^2} \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{1}{a + b\frac{2y}{1+y^2}}\frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2}{ay^2+2by+a}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2}{a\left(y^2+2\frac{b}{a}y+1\right)}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2}{a\left(\left(y+\frac{b}{a}\right)^2+1-\frac{b^2}{a^2}\right)}\,\mathrm{d}y$$

$$= \int \frac{2a}{a^2-b^2}\frac{1}{\left(\frac{ay+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{l} u = \frac{ay+b}{\sqrt{a^2-b^2}} \\ \mathrm{d}u = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\mathrm{d}y \end{array} \right| = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan u$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\frac{a\tan\left(\frac{x}{2}\right)+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) + C_{(-\pi,\pi)}.$$

Na intervalu, kde je možné použít substituci $y = \tan\frac{x}{2}$ tedy platí

$$\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\frac{a\tan\left(\frac{x}{2}\right)+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) + C_{(-\pi,\pi)+2k\pi}.$$

Soustřeďme se na interval $(-\pi,\pi)$, limity v krajních bodech tohoto intervalu jsou

$$\lim_{x\to\pi-}\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\frac{a\tan\left(\frac{x}{2}\right)+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) + C_{(-\pi,\pi)} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\frac{\pi}{2} + C_{(-\pi,\pi)}$$

$$\lim_{x\to-\pi+}\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\frac{a\tan\left(\frac{x}{2}\right)+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) + C_{(-\pi,\pi)} = -\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\frac{\pi}{2} + C_{(-\pi,\pi)},$$

abychom tedy mohli primitivní funkce na jednotlivých intervalech $(-\pi,\pi)+2k\pi$ napojit, je potřeba na každém intervalu vystoupat o $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$. Po slepení jednotlivých částí lze definovat primitnivní funkci na celém $\mathbb{R}$ (v bodech $\pi + 2k\pi$ je funkční hodnota definovaná jako limita):

$$F = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\frac{a\tan\left(\frac{x}{2}\right)+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) + k\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} + C, & x \in (-\pi,\pi) + 2k\pi, \\ (2k-1)\,\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}, & x = -\pi + 2k\pi. \end{cases}$$

kde konstanta C má stejnou hodnotu na všech intervalech.