

Derivace

1. Existuje derivace funkce $f(x) = x|x|$ v bodě 0?
2. Pro jaké α reálné má funkce

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

derivaci v bodě 0. Kdy je tato derivace v bodě 0 spojitá?

3. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \text{ je racionální} \\ 0 & x \text{ je iracionální.} \end{cases}$$

má derivaci pouze v nule.

4. Ukažte, že derivace sudé funkce je funkce lichá.
5. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ ax + b & x > 1. \end{cases}$$

Určete a, b tak, aby $f(x)$ měla v bodě 1 derivaci.

6. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ v bodě $[-2, ?]$ grafu.

Elementární funkce

Dokažte, že

7. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}, x \in \mathbb{R}$
8. $\operatorname{arcsin} x + \operatorname{arccos} x = \frac{\pi}{2}, x \in [-1, 1]$
9. $\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), x \in \mathbb{R}$

$$10. \operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), |x| \geq 1$$

$$11. \operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, x \in (-1, 1)$$

$$12. \operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, |x| > 1$$

Derivace

13. Dokažte vztahy pro derivace cyklometrických, hyperbolických a hyperbolometrických funkcí.

Vypočtete derivace následujících funkcí v libovolném bodě x , kde derivace existuje:

$$14. f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$$

$$15. f(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$$

$$16. f(x) = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$$

$$17. f(x) = \sin \sin \sin x$$

$$18. f(x) = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$$

$$19. f(x) = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$$

$$20. f(x) = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$$

$$21. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$$

$$22. f(x) = x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x$$

$$23. f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}).$$