

Příklady na 2. týden

Matematická indukce

Dokažte matematickou indukcí následující rovnosti a nerovnosti

1. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$
3. $\prod_{i=1}^n (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n x_i$, $x_i \geq -2$, x_i mají stejná znaménka
4. $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ (binomická věta)
5. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$
6. $\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$, $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ (AG nerovnost)
7. $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$
8. $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$
9. $\left| \sin \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \sin x_k$, $x_k \in [0, \pi]$, $k = 1, 2, \dots, n$
10. $\frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$
11. $n^{n+1} > (n+1)^n$

Supremum, infimum množin

12. U následujících množin nalezněte sup, inf, max a min (pokud existují).
Ověřte z definice!
a) $M = (0, 1]$ b) $M = [0, 1]$ c) $M = (0, \infty)$

d) $M = \left\{ \frac{m}{n}; m, n \in N \right\}$ e) $M = \{0, 5; 0, 55; 0, 555; \dots\}$
 f) $M = \{x \in Q; x^2 < 3\}$. Ukažte, že $\sup M \notin Q$.

13. Nechť A, B jsou neprázdné omezené podmnožiny R . Dokažte:
 a) $\inf(-A) = -\sup A$ b) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$
 c) $\inf(A - B) = \inf A - \sup B$ d) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$,
 kde A, B obsahují pouze nezáporné prvky. Množiny $-A = \{x; -x \in A\}$, $A + B = \{z; z = x + y, x \in A, y \in B\}$, ostatní jsou definovány analogicky.
14. Nechť A, B jsou neprázdné omezené podmnožiny R . Lze obecně vyjádřit $\sup(A \cup B)$ a $\sup(A \cap B)$ pomocí $\sup A$ a $\sup B$?
15. Nechť M je neprázdna množina a nechť $f : M \mapsto R$ a $g : M \mapsto R$ jsou omezené funkce. Dokažte, že
 a) $\sup_{x \in M}(f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in M} f(x) + \sup_{x \in M} g(x)$. Musí platit rovnost?
 b) $\sup_{x \in M}(f(x) + g(x)) \geq \sup_{x \in M} f(x) + \inf_{x \in M} g(x)$
 c) $\sup_{x \in M}(f(x) - g(x)) \leq \sup_{x \in M} f(x) - \inf_{x \in M} g(x)$