Hlubší vlastnosti spojitých funkcí

Vyberte ty odpovědi, které jsou *vždy* pravdivé.

1. Funkce f je spojitá a rostoucí na intervalu $[0, 4]$, pak
   (a) f nemá kořen na $[0, 4]$.
   (b) $f(0)$ je minimum funkce f na intervalu $[0, 4]$.
   (c) funkce $g(x) = x + f(x)$ je rostoucí na intervalu $[0, 4]$.
   (d) funkce $h(x) = \frac{f(x)}{x+1}$ je spojitá na intervalu $[0, 4]$.
2. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $-1 \leq f(x) \leq 1$, pak
   (a) má funkce f maximum na $\mathbb{R}$.
   (b) je funkce $\sqrt{(f(x))^2 - 4}$ spojitá na $\mathbb{R}$.
   (c) existuje limita $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   (d) je funkce $g(x) = xf(x)$ spojitá v bodě $x = 0$.
3. Funkce f je spojitá na intervalu $[-3, 7]$, pak
   (a) platí $\lim\limits_{x\to 7} f(x) = f(7)$.
   (b) má funkce f minimum na intervalu $[-3, 7]$.
   (c) má funkce f kořen na intervalu $[-3, 7]$.
   (d) platí $\lim\limits_{x\to 2} xf(x) = 2f(2)$.
4. Funkce f je spojitá na sjednocení intervalů $[-1, 0) \cup (0, 1]$ a je definovaná v nule. Pak
   (a) je funkce f spojitá na intervalu $[-1, 1]$.
   (b) existuje $d \in (-1, 1)$ tak, že $f(d) = 1$.
   (c) je funkce f spojitá na intervalu $(-1, 0)$.
   (d) je funkce $g(x) = f(0)$ spojitá na intervalu $[-1, 1]$.
5. Funkce f je spojitá na intervalu $[-2, 8)$, pak
   (a) existuje limita $\lim\limits_{x\to 8-} (x - 8)\sin(f(x))$.
   (b) existuje $c \in (-2, 7)$ tak, že $f(c) = \frac{1}{2}(f(-2) + f(7))$.
   (c) má funkce f maximum na intervalu $[-2, 8)$.
   (d) je funkce f nerostoucí.
6. Funkce f je spojitá na intervalu $[2, 7]$, pak
   (a) má f minimum na intervalu $[2, 7]$.

(b) je $f(2) < f(7)$.

(c) má f maximum na intervalu $[2, 7]$.

(d) pro $\forall c \in \mathbb{R}$, které leží mezi[1] $f(2)$ a $f(7)$ existuje $d \in [2, 7]$, tak že $f(d) = c$.

7. Funkce f je spojitá na intervalu $[1, 3]$ a navíc platí $f(1) = 2$ a $f(3) = -2$, pak

   (a) má rovnice $x = f(x)$ na intervalu $[1, 3]$ aspoň jedno řešení.

   (b) má funkce $g(x) = xf(x)$ kořen na intervalu $[1, 3]$.

   (c) je $\forall x \in [1, 3] : -2 \leq f(x) \leq 2$.

   (d) je $f(2) > 0$.

8. Funkce f je spojitá na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, pak

   (a) je funkce $g(x) = \frac{f(x)}{\cos(x)}$ spojitá na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   (b) f má maximum na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   (c) je $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} = f(\frac{\pi}{2})$.

   (d) je $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+} = f(\frac{\pi}{2})$.

9. Funkce f je spojitá na intervalu $[2, 9]$ a navíc platí $f(2) = 3$ a $f(9) = -7$, pak

   (a) funkce $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ není spojitá na intervalu $[2, 9]$.

   (b) platí $\lim\limits_{x \to 5}(2x + f(x)) = 10 + f(5)$.

   (c) má funkce $f(x)$ kořen intervalu $[2, 9]$.

   (d) je funkce f klesající na intervalu $[2, 9]$.

10. Funkce g je definována na intervalu $[-1, 1]$ a funkce $f(x) = xg(x)$ je na intervalu $[-1, 1]$ spojitá. Pak

    (a) má funkce $f(x)$ kořen na intervalu $[-1, 1]$.

    (b) je funkce $g(x)$ spojitá na intervalu $[-1, 1]$.

    (c) má funkce $g(x)$ kořen na intervalu $[-1, 1]$.

    (d) má funkce $f(x)$ maximum na intervalu $[-1, 0)$.

11. Funkce f je spojitá na intervalu $(0, 10]$, pak

    (a) funkce f nemusí mít na tomto intervalu minimum.

    (b) funkce $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ není spojitá v bodě $x = 0$ (funkce $g(x)$ je v nule definována jako $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x}$).

[1] To znamená, že $c \in [f(2), f(7)]$ je-li $f(2) \leq f(7)$, resp. $c \in [f(7), f(2)]$ je-li $f(2) > f(7)$.

(c) neexistuje limita $\lim_{x\to 0+} f(x)$.

(d) funkce f nemusí mít na tomto intervalu maximum.

12. Funkce f je spojitá na sjednocení intervalů $[-1,1)\cup(0,2]$, pak

(a) je $\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x)$.

(b) funkce f nemá kořen na intervalu $[-1,1)\cup(0,2]$.

(c) funkce f není spojitá v nule.

(d) funkce f nemusí mít na intervalu $[-1,1)\cup(0,2]$ maximum.

13. Funkce f je spojitá v bodě $x=0$, pak

(a) je $\lim_{x\to 0+}(f(x)-f(0))=0$.

(b) funkce f není spojitá v bodě $x=1$.

(c) je funkce $g(x)=x^2 f(x)$ spojitá v bodě $x=0$.

(d) je $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

14. Funkce f má limitu v bodě $x=0$ a je v tomto bodě definovaná, pak

(a) je $\lim_{x\to 0+}(f(x)-f(0))=0$.

(b) je $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x)$.

(c) je omezená na okolí bodu $x=0$.

(d) má funkce f v tomto bodě minimum.

15. Funkce f je spojitá na sjednocení intervalů $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$, pak

(a) funkce f nemusí mít kořen na sjednocení intervalů $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

(b) je-li navíc $f(2)=2$ a $f(5)=8$, pak existuje $d\in\mathbb{R}$ takové, že $f(d)=4$.

(c) platí $\lim_{x\to 1+} f(x) \neq \lim_{x\to 1-} f(x)$.

(d) funkce f musí mít minimum na sjednocení intervalů $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

16. Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$ a pro každé $x\in\mathbb{R}$ platí $0\le f(x)\le x^4$. Pak

(a) má funkce $f(x)$ má v $\mathbb{R}$ kořen.

(b) je funkce $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$ dodefinovaná v bodě $x=0$ vztahem $g(0)=0$ v tomto bodě spojitá.

(c) je funkce $h(x)=\frac{f(x)}{x^4}$ dodefinovaná v bodě $x=0$ vztahem $h(0)=0$ v tomto bodě spojitá.

(d) funkce f nemusí mít minimum na $\mathbb{R}$.

17. Funkce f je spojitá na intervalu $[1,2]$, pak

(a) je funkce $\ln|f(x)|$ spojitá na intervalu $[1, 2]$.
(b) je funkce $e^{f(x)}$ spojitá na intervalu $[1, 2]$.
(c) má funkce $g(x) = xf(x) - f(x)$ kořen v intervalu $[1, 2]$.
(d) má funkce $\frac{f(x)}{x}$ minimum v intervalu $[1, 2]$.

18. Funkce f je spojitá na intervalu $[-1, 1]$ a navíc platí $f(-1) = f(1)$. Pak
    (a) funkce f nemůže být striktně rostoucí.
    (b) funkce f má kořen na intervalu $[-1, 1]$.
    (c) je $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} f(x)\sin(x) = \frac{f(\frac{\pi}{6})}{2}$.
    (d) existuje $c \in [-1, 1]$ tak, že $f(c) \neq f(-1)$.

19. Funkce f je spojitá na intervalu $[2, 4]$ a navíc platí $f(2) = -f(4)$. Pak
    (a) má funkce f kořen na intervalu $[2, 4]$.
    (b) funkční hodnota v bodě 2 je záporná.
    (c) funkce f nemůže být rostoucí.
    (d) funkce $f(2x)$ je spojitá na intervalu $[1, 2]$.

20. Funkce f je spojitá a klesající na intervalu $[-1, 3]$. Pak
    (a) má funkce f kořen na intervalu $[-1, 3]$.
    (b) platí $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x} = \frac{f(2)}{2}$.
    (c) je $x - f(x) \geq 0$ pro každé $x \in [-1, 1]$.
    (d) je funkce $g(x) = x - f(x)$ rostoucí na intervalu $[-1, 3]$.

21. Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$, pak
    (a) má funkce f kořen v R.
    (b) je funkce $g(x) = \sin(f(x))$ spojitá na $\mathbb{R}$.
    (c) je $f(-1) < 0 < f(1)$.
    (d) funkce f nemá minimum.

22. Funkce f je spojitá a prostá na $[-2, 3]$ a navíc platí $f(-2)f(3) \leq 0$, pak
    (a) má funkce f kořen v $[-2, 3]$.
    (b) je funkce f monotónní na $[-2, 3]$.
    (c) má funkce f právě jeden kořen v $[-2, 3]$.
    (d) je $f(-2) \leq f(3)$.