1 Jak řešit nehomogenní obyčejnou lineární diferenciální rovnici?

1.1 Teorie k metodě partikulárního řešení

Nejdříve[1] si ujasníme jakou úlohu máme před sebou. Úloha je následující: hledáme funkci[2] $y(x)$, tak aby byla splněna rovnice

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_2y''(x) + a_1y'(x) = f(x), \tag{1}$$

kde $y^{(n)}(x)$ značí n-tou derivaci funkce $y(x)$, koeficienty a_i, $i = 1, \ldots, n-1$ jsou nějaká (pevná) reálná čísla a $f(x)$ je nějaká předem známá funkce. Funkci $f(x)$ nazýváme pravá strana. Dalším požadavkem kladeným na hledanou funkci $y(x)$ je *počáteční podmínka*. Od funkce $y(x)$ požadujeme, aby

$$y(x)|_{x=x_0} = y_0^0, y'(x)|_{x=x_0} = y_0^1, \ldots, y^{(n-1)}(x)_{x=x_0} = y_0^{n-1} \tag{2}$$

aneb chceme, aby funkční hodnota funkce $y(x)$ v bodě x_0 byla rovná y_0^0 a aby hodnota derivace funkce $y(x)$ bodě x_0 byla rovná y_0^1 ... a aby hodnota $(n-1)$-té derivace funkce $y(x)$ bodě x_0 byla rovná y_0^{n-1}.

Celý problém (1) můžeme zkráceně zapsat jako

$$L(y(x)) = f(x), \tag{3}$$

kde $L(y(x))$ je nějaký předpis, který říká co udělat s funkcí $y(x)$. Přesněji

$$L(y(x)) =_{def} y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_2y''(x) + a_1y'(x).$$

Nejdůležitější vlastností L je, že je lineární, aneb platí

$$L(u(x) + v(x)) = L(u(x)) + L(v(x)). \tag{4}$$

Linearita L nás ihned směřuje k řešení našeho problému. Představme si, že dokážeme uhodnout *jedno* řešení rovnice (3), budeme mu říkat *partikulární* nebo *speciální* řešení, tak že platí

$$\begin{aligned} &L(y_{spec}(x)) = f(x), \\ &y_{spec}(x)|_{x=x_0} = c_0, y'_{spec}(x)|_{x=x_0} = c_1, \ldots, y_{spec}^{(n-1)}(x)_{x=x_0} = c_{n-1}, \end{aligned}$$

kde c_i, $i = 0, \ldots, n-1$ je nějaká vhodná počáteční podmínka. Bohužel uhádnutí jednoho řešení pro nějaké speciální počáteční podmínky ještě neznamená, že jsme napsali obecné řešení. Obecné řešení totiž může vycházet z libovolných podmínek (2).

[1] Tento krátký teoretický úvod si neklade žádné nároky na přesnost a úplnost, od toho jsou učebnice Například *Jiří Kopáček: Matematická analýza pro fyziky II, 2. vyd., Praha: Matfyzpress, 2003.* Cílem tohoto pojednání je metody řešení nehomogenních obyčejných diferenciálních rovnic předvést na konkrétním případě.

[2] Jak již bylo řečeno, jde nám o techniku a ne o teorii, takže nebudeme specifikovat jaké vlastnosti daná funkce musí mít.

Jenže tuto obtíž lze překonat. Snadno totiž najdeme řešení $y_{hom}(x)$ homogenní rovnice (rovnice s nulovou pravou stranou)

$$L(y_{hom}(x)) = 0,$$

$$y_{hom}(x)|_{x=x_0} = y_0^0 - c_0, y'_{hom}(x)|_{x=x_0} = y_0^1 - c_1, \ldots, y_{hom}^{(n-1)}(x)_{x=x_0} = y_0^{n-1} - c_{n-1}.$$

Součet obou řešení $y_{hom}(x)$ a $y_{spec}(x)$ je pak řešením původní rovnice (3). Skutečně (využíváme linearity (4)) po dosazení do rovnice dostaneme

$$L(y_{hom}(x) + y_{spec}(x)) = L(y_{hom}(x)) + L(y_{spec}(x)) = 0 + f(x) = f(x)$$

a pro počáteční podmínky platí

$$\begin{aligned}
(y_{hom}(x) + y_{spec}(x))\,|_{x=x_0} &= (y_0^0 - c_0) + c_0 = y_0^0 \\
(y_{hom}(x) + y_{spec}(x))'\,|_{x=x_0} &= (y_0^1 - c_1) + c_1 = y_0^1 \\
&\vdots \\
(y_{hom}(x) + y_{spec}(x))^{(n-1)}\,|_{x=x_0} &= (y_0^{(n-1)} - c_0) + c_0 = y_0^{(n-1)}.
\end{aligned}$$

Pokusme se tedy najít obecné řešení rovnice

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x\cos(x), \tag{5}$$

$$y(0) = y_0^0, \tag{6}$$

$$y'(0) = y_0^1. \tag{7}$$

V průběhu řešení tohoto příkladu ukážeme, jak obecně hledat partikulární řešení (a ukážeme si také jak tento obecný předpis použít v tomto konkrétním případě).

1.1.1 Jak najít homogenní řešení?

Klasickým postupem. Řešení homogenní rovnice

$$y''_{hom}(x) - 3y'_{hom}(x) + 2y(x) = 0 \tag{8}$$

hledáme ve tvaru $y_{hom}(x) = e^{\lambda x}$. Po dosazení do homogenní rovnice dostaneme

$$\left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right) e^{\lambda t} = 0.$$

Musí proto být

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0, \tag{9}$$

což je splněno pro $\lambda_1 = 1$ nebo $\lambda_2 = 2$. Řešení homogenní rovnice je pak dáno jako

$$y_{hom}(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \tag{10}$$

kde c_1 a c_2 jsou konstanty, které určíme z počátečních podmínek.

Polynom $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ nazýváme charakteristický polynom homogenní rovnice (8).

1.1.2 Jak najít partikulární řešení? Metoda násady.

Na to existuje speciální kuchařka. Postup je následující.

- Je-li pravá strana ve tvaru
$$f(x) = e^{\mu x} R(x),$$
kde $R(t)$ je polynom stupně k, pak hledáme partikulární řešení ve tvaru
$$y_{spec}(x) = x^\rho Q(x) e^{\mu x},$$
kde $Q(x)$ je obecný polynom stupně k a ρ je
  - $\rho = 0$ není-li μ kořen charakteristického polynomu odpovídající homogenní rovnice
  - $\rho = \nu$ je-li μ kořen charakteristického polynomu odpovídající homogenní rovnice a jeho násobnost je ν.
- Je-li pravá strana ve tvaru
$$f(x) = e^{\alpha x} \left(R(x) \sin(\beta x) + Q(x) \cos(\beta x) \right),$$
kde $R(x)$ je polynom stupně k a $Q(x)$ je polynom stupně l, pak hledáme partikulární řešení ve tvaru
$$y_{spec}(x) = x^\rho e^{\alpha x} \left(S(x) \sin(\beta x) + T(x) \cos(\beta x) \right),$$
kde $S(x)$ je obecný polynom stupně $\max\{k, l\}$ a kde $T(x)$ je obecný polynom stupně[3] $\max\{k, l\}$ a ρ je
  - $\rho = 0$ není-li $\alpha + i\beta$ kořen charakteristického polynomu odpovídající homogenní rovnice
  - $\rho = \nu$ je-li $\alpha + i\beta$ kořen charakteristického polynomu odpovídající homogenní rovnice a jeho násobnost je ν.

V našem konkrétním případě (pravá strana $x \cos(x)$) hledáme partikulární řešení ve tvaru
$$y_{spec}(x) = (Ax + B)\cos(x) + (Cx + D)\sin(x), \tag{11}$$
neboť pravá strana má tvar $e^{0x}(x\cos(x) + 0\sin(x))$ (před funkcí $\cos(x)$ je polynom prvního stupně a $0 + i$ není kořen charakteristického polynomu). Dosazením (11) do rovnice (5) dostaneme (seskupili jsme k sobě koeficienty stojící před stejnými funkcemi)
$$(-2A+3B-3C+D)\sin(x)+(3A+C)x\sin(x)+(-3A+B+2C-3D)\cos(x)+ \\ + (A - 3C)x\cos(x) = x\cos(x).$$

[3] To mimo jiné znamená, že i když na pravé straně vystupuje pouze jedna goniometrická funkce (například $R(x)\sin(\beta x)$), tak řešení hledáme ve tvaru $S(x)\sin(\beta x) + T(x)\cos(\beta x)$, tj. musíme přidat i druhou goniometrickou funkci.

Aby výše uvedená rovnice platila, musí souhlasit vedoucí koeficienty (tj. koeficienty před jednotlivými funkcemi), aneb musí platit

$$\begin{aligned} -2A + 3B - 3C + D &= 0 \\ 3A + C &= 0 \\ -3A + B + 2C - 3D &= 0 \\ A - 3C &= 1. \end{aligned}$$

Zbývá nám tedy vyřešit soustavu algebraických rovnic

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

což ovšem není záležitost matematické analýzy. Výsledkem je

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{-3}{25} \\ \frac{-3}{10} \\ \frac{-17}{50} \end{bmatrix}.$$

Celkem (po dosazení hodnot koeficientů do (11)) dostaneme

$$y_{spec}(x) = \frac{1}{10} x \cos(x) - \frac{3}{25} \cos(x) - \frac{3}{10} x \sin(x) - \frac{17}{50} \sin(x).$$

Obecné řešení úlohy (5) je pak dáno jako součet řešení partikulárního a řešení homogenní rovnice

$$y(x) = \frac{1}{10} x \cos(x) - \frac{3}{25} \cos(x) - \frac{3}{10} x \sin(x) - \frac{17}{50} \sin(x) + c_1 e^x + c_2 e^{2x}. \quad (12)$$

Konstanty c_1 a c_2 dopočteme tak, aby platilo $y(0) = y_0$ a $y'(0) = y_0^1$.

1.2 Variace konstant - jiná metoda pro řešení

Myšlenka skrytá za technikou variace konstant je následující. Pro homogenni rovnici (5) máme řešení ve tvaru (10). Hledáme-li řešení nehomogenní rovnice, můžeme to zkusit tak, že použijeme řešení rovnice homogenní, ale představíme si, že konstanty c_1 a c_2 jsou závislé na proměnné x, aneb

$$y(x) = \underbrace{c_1(x)e^x + c_2(x)e^{2x}}_{E}. \quad (13)$$

Tento předpis pro funkci $y(x)$ dosadíme do rovnice (5) a podíváme se, co vyjde. Spočtěmě si tedy nejdřív první derivaci (seskupujeme členy ve kterých je derivace funkcí $c_1(x)$ a $c_2(x)$ a členy ve kterých derivace není),

$$y'(x) = \underbrace{c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{2x}}_{A} + \underbrace{c_1(x)e^x + 2c_2(x)e^{2x}}_{B},$$

navíc budme požadovat, aby bylo $A = 0$. Pak můžeme spočítat druhou derivaci a dostaneme (derivujeme pouze B, neboť A je rovné nule)

$$y''(x) = \underbrace{c_1'(x)e^x + 2c_2'(x)e^{2x}}_{C} + \underbrace{c_1(x)e^x + 4c_2(x)e^{2x}}_{D},$$

po dosazení do rovnice (5) máme

$$C + D - 3B + 2E = x\cos(x).$$

Nyní si uvědomíme, že v členech B, D a E jsme s "konstantami" $c_1(x)$ a $c_2(x)$ neprováděli žádné úpravy. Je tedy

$$D - 3B + 2E = 0,$$

neboť $y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x}$ řeší homogenní rovnici[4] (a v členech B, D a E se s "konstantami" $c_1(x)$ a $c_2(x)$ nic nedělo). Z celé rovnice nám tedy zbývá

$$C = x\cos(x)$$

a dále podmínka $A = 0$, kterou jsme použili v průběhu výpočtu. Celkem požadujeme splnění těchto dvou rovnic

$$\begin{aligned} c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{2x} &= 0 \quad (\text{aneb } A = 0) \\ c_1'(x)e^x + 2c_2'(x)e^{2x} &= x\cos(x) \quad (\text{aneb } C = x\cos(x)), \end{aligned}$$

což pro jednotlivé funkce $c_1(x)$ a $c_2(x)$ znamená (odečtením první rovnice od druhé)

$$c_2'(x) = x\cos(x)e^{-2x} \tag{14}$$

a (od druhé rovnice odečteme dvojnásobek první)

$$c_1'(x) = -x\cos(x)e^{-x}. \tag{15}$$

Zbývá tedy najít řešení rovnic (14) a (15), což je snadné neboť musíme pouze najít primitivní funkce k pravým stranám

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\int x\cos(x)e^{-x}dx \\ c_2(x) &= \int x\cos(x)e^{-2x}dx. \end{aligned}$$

Výsledkem je (a_1 a a_2 jsou integrační konstanty)

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \frac{1}{2}x\cos(x)e^{-x} + (-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})e^{-x}\sin(x) + a_1 \\ c_1(x) &= (-\frac{2}{5}x - \frac{3}{25})\cos(x)e^{-2x} - (-\frac{1}{5}x - \frac{4}{25})\sin(x)e^{-2x} + a_2. \end{aligned}$$

[4] Promyslete.

Získané funkce c_1 a c_2 dosadíme zpět do rovnice (13) a dostaneme

$$y(x) = \frac{1}{10}x\cos(x) - \frac{3}{25}\cos(x) - \frac{3}{10}x\sin(x) - \frac{17}{50}\sin(x) + a_1e^x + a_2e^{2x},$$

což je kupodivu totéž jako (12).

Konstanty a_1 a a_2 dopočteme tak, aby platilo $y(0) = y_0$ a $y'(0) = y_0^1$.