Příklady na 11. týden

Lokální a globální extrémy funkcí

Nalezněte lokální extrémy funkcí

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$
2. $f(x) = e^x \sin x$
3. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$

   Dokažte následující nerovnosti
4. $xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$, $x, y > 0$, $1 < p, q < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (Youngova nerovnost)
5. $e^x > x + 1$, $x \neq 0$
6. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

   má v bodě 0 ostré lokální minimum a funkce

$$g(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

   nemá v bodě 0 lokální extrém, přestože platí $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$.
7. Nalezněte globální extrémy funkce $f(x) = x^2 - 4x + 6$ na intervalu $[-3, 10]$.
8. Nalezněte supremum a infimum funkce $f(x) = xe^{-0.01x}$ na intervalu $(0, \infty)$.
9. Nádoba naplněná vodou se svislou stěnou výšky h stojí na vodorovné rovině. Vypočítejte výšku otvoru nádoby nad vodorovnou rovinou tak, aby voda stříkala co nejdále.

Monotónie funkcí

10. Nalezněte intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x^n e^{-x}$, $n \in N$, rostoucí a klesající.

11. Pro atomové teplo prvku platí

$$C_v = 3R\frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}\,,$$

kde $x = \frac{T^*}{T}$, T je absolutní teplota v Kelvinech, T^* je tzv. charakteristická teplota a R je plynová konstanta. Dokažte, že atomové teplo prvku je rostoucí funkce teploty.