Příklady na 1. týden

# Opakování

## Opakování ze SŠ

1. Nalezněte reálnou a imaginární část
   a) $\frac{2}{1-3i}$ b) $(1+i\sqrt{3})^3$

2. Nalezněte velikosti a argumenty následujících komplexních čísel
   a) $-2-2i$ b)$1+i^{123}$

3. Dokažte
   a) $z+\overline{z} = 2\mathrm{Re}\, z$ b) $z-\overline{z} = 2\mathrm{Im}\, z$ c) $\overline{(\overline{z})} = z$
   d) $|\overline{z}| = |z|$ e) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
   f) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi} \quad z_1, z_2 \neq 0$
   g) $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi} \quad z_1, z_2 \neq 0$

4. Řešte v $\mathbb{C}$:
   a) $x^6+1=0$ b) $x^2+x+1=0$

5. Řešte v $\mathbb{R}$:
   a) $|x+1|+|x-1| \geq 2$ b) $|x-3|+|x+2| \leq 0$

## Výroky, množiny, zobrazení

6. Dokažte, že platí
   a) $A \Rightarrow A$
   b) $(A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
   c) $A \Leftrightarrow A$
   d) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$
   e) $(A \Leftrightarrow B$ a $B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$
   f) $\mathrm{non}\,(\mathrm{non}\, A) \Leftrightarrow A$
   g) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\mathrm{non}\, B \Rightarrow \mathrm{non}\, A)$
   h) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\mathrm{non}\, B \Leftrightarrow \mathrm{non}\, A)$
   i) $(\mathrm{non}\,(A \bigvee B)) \Leftrightarrow ((\mathrm{non}\, A) \bigwedge (\mathrm{non}\, B))$
   j) $(\mathrm{non}\,(A \bigwedge B)) \Leftrightarrow ((\mathrm{non}\, A) \bigvee (\mathrm{non}\, B))$

k) $(\text{non}\,(A \Rightarrow B)) \Leftrightarrow (A \bigwedge (\text{non}\, B))$
l) $(\text{non}\,(A \Leftrightarrow B)) \Leftrightarrow ((A \bigwedge (\text{non}\, B)) \bigvee (B \bigwedge (\text{non}\, A))$

7. Zapište negaci výroku

$$\exists x \in \mathbb{R} : \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

a rozhodněte, který z výroků je pravdivý.

8. Platí následující výroky?
a) $\forall a \in \mathbb{R}\, \exists \varepsilon > 0\, \exists \alpha \in \mathbb{R}\, \forall x \in (a, a+\varepsilon) : x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$
b) $\exists a \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \forall \alpha \in \mathbb{R}\, \exists x \in (a, a+\varepsilon) : x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$

9. Dokažte:
a) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$
b) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$
c) Nechť $A_i$, $i = 1, 2, \ldots$ je systém libovolných množin a nechť $B_n = \cup_{i=1}^n A_i$. Potom $\cup_{n=1}^\infty A_n = \cup_{n=1}^\infty B_n$.

10. Dokažte, že je-li $f$ zobrazení, pak

$$f(M_1) \setminus f(M_2) \subset f(M_1 \setminus M_2)\,.$$

($M_1$, $M_2$ jsou podmnožiny definičního oboru $f$.) Kdy platí rovnost?

11. Nechť $\varphi : [0, \infty) \mapsto [1, \infty)$ je bijekce a nechť $\psi(x) = \sqrt{\varphi(x)^2 - 1}$. Dokažte, že existuje inverzní funkce $\psi^{-1}$ a vyjádřete ji pomocí $\varphi^{-1}$. Určete $D_{\psi^{-1}}$.