

DOMÁCÍ ÚLOHA Č.3 — TEORETICKÉ PŘÍKLADY NA MARKOVSKÉ
ŘETĚZCE

(ODEVZDÁNÍ DO 13.12. 16:00)

Úloha 1. Žil byl v jednom domě králíček Pepíček, který rád a často žral. Pokud zrovna nežral, tak se alespoň odebral do obývacího pokoje překusovat kabely. K tomu docházelo každou hodinu s pravděpodobností $\frac{1}{3}$. Se zbylou pravděpodobností $\frac{2}{3}$ si Pepíček pochutnával na dobré potravě a přitom se řídil jistými pevnými pravidly. Pokud v minulé hodině měl seno nebo překusoval kabely, dal si seno. Když si v předchozí hodině dopřával zrní, tak ho odmítal v následující hodině, a vybíral si pouze mezi senem a ovocem (obojí se stejnou pravděpodobností). Po ovoci volil rovnoměrně náhodně mezi senem, zrním a ovocem.

Spočtete pravděpodobnost, že pokud začne králík zrním, dostane se dříve k senu než k překusování kabelů.

Úloha 2. Sisyfos má za úkol uloženo vykultit těžký balvan na nekonečně vysoký kopec. Nezávisle na přechozí historii a také na výšce, v jaké se balvan v čase n nachází, jej Sisyfos vykultí o 1m výše s pravděpodobností $\frac{1}{4}$, s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ si odpočine tak, že kámen zůstane ve stejné výšce, a s pravděpodobností $\frac{1}{4}$, roztrpčen nad marností své snahy, nechá balvan skutálet zpět na počáteční úroveň.

Označme X_n výšku nad počáteční úrovní, ve které se balvan nachází v čase $n \in \mathbb{N}_0$.

Ukažte, že $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ je homogenní markovský řetězec, a sestavte jeho matici pravděpodobností přechodu. Klasifikujte stavy řetězce a určete stacionární rozdělení (pokud existuje).