

Početní část

Příklad 1. V botníku je devět párů bot: čtyři vyčištěné a pět nevyčištěných. Domácí posluhovačka večer náhodně vybere tři páry bot (bez ohledu na jejich čistotu) a vyčistí je. Druhý den ráno si na služební cestu vybereme z botníku náhodně dva páry bot.

- (a) S jakou pravděpodobností jsou oba páry vyčištěné a můžeme je tedy rovnou zabalit?
- (b) Jestliže jsou oba páry vyčištěné, s jakou pravděpodobností zbývají v botníku právě čtyři nevyčištěné páry bot?
- (c) Jaké je rozdělení počtu čistých párů v botníku, střední hodnota a rozptyl?

Příklad 2. Nechť $X_1, X_2, \dots$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin a X_k má hustotu

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in (\frac{1}{k}, \frac{1}{k} + 1), \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

- (a) Určete pravděpodobnost, že nekonečně krát nastane jev $A_k = [X_k > 1]$.
- (b) Spočítejte EX_k a $\text{var}(X_k)$.
- (c) Pomocí silného zákona velkých čísel vyšetřete limitní chování průměru $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. Výsledek запиšte co nejexplicitněji.
- (d)* Splňuje posloupnost $X_1, X_2, \dots$ centrální limitní větu? Výsledek запиšte co nejexplicitněji.

Příklad 3. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $N(0, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 > 0$ je neznámý parametr.

- (a) Nalezněte odhad parametru σ^2 metodou maximální věrohodnosti. Vyšetřete, zda je nestranným a konzistentním odhadem parametru σ^2 .
- (b) Označme $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Vyšetřete, zda je $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$, nestranným a konzistentním odhadem parametru σ^2 .
- (c) Zjistěte, zda $V_n = \frac{1}{2n} \sum_{i=2}^n (X_i - X_{i-1})^2$ je nestranným a konzistentním odhadem parametru σ^2 .

Poznámky: Za každý příklad lze získat až 6 bodů. K úspěšnému napsání písemky je zapotřebí získat alespoň **9 bodů**. Tam, kde je hvězdička, lze získat dva body navíc.

Každou otázku pište, prosím, na **jiný papír**, na který nezapomeňte napsat své **jméno**!

Teoretická část

Otázka 1. Definujte konvergenci v pravděpodobnosti a konvergenci skoro jistě.

- (a) Zformulujte silný zákon velkých čísel pro stejně rozdělené a nesterjné rozdělené náhodné veličiny. Porovnejte předpoklady těchto dvou zákonů velkých čísel.
- (b) Zformulujte Kolmogorovovu nerovnost a porovnejte ji s Čebyševovou nerovností.
- (c) Dokažte Čebyševovu nerovnost.
- (d)* Dokažte Kolmogorovovu nerovnost.

Otázka 2. Obecně definujte intervalový odhad.

- (a) Popište nějakou metodu konstrukce intervalového odhadu.
- (b) Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Určete rozdělení náhodné veličiny $V = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S_n}$ a podrobně vysvětlete, proč tomu tak je. Využijte znalosti rozdělení V ke konstrukci intervalového odhadu pro parametr μ a k testování nulové hypotézy $H_0 : \mu = \mu_0$ proti oboustranné či jednostranné alternativě.

Otázka 3. Definujte náhodný vektor.

- (a) Definujte varianční a korelační matici náhodného vektoru. Napište, jak se počítá kovariance a korelace dvou náhodných veličin. Jak vypadá výpočet pro speciální případy absolutně spojitých a diskrétních náhodných veličin.
- (b) Nechť $(X_1, \dots, X_n)$ je náhodný vektor. Odvoďte rozptyl součtu $a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$.
- (c)* Dokažte, že varianční a korelační matice jsou pozitivně semidefinitní.

Otázka 4. Zformulujte centrální limitní větu pro alternativní rozdělení.

- (a) Pokud byste chtěli mít jistotu, že podíl úspěchů v n nezávislých pokusech se od skutečné hodnoty pravděpodobnosti p liší nejvýše o 0,01 s pravděpodobností nejmeně 0,99, kolik pokusů je třeba učinit?
- (b) Nechť $X_1, X_2, \dots$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením

$$P[X = -1] = P[X = 1] = \frac{1}{2}, \text{ a označte } S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Určete pro velké n s jakou pravděpodobností bude platit $P[|S_n| > k\sqrt{n}]$ v závislosti na konstantě k .

Poznámky: Za každý příklad lze získat až 6 bodů. K úspěšnému napsání písemky je zapotřebí získat alespoň **12 bodů**. Tam, kde je hvězdička, lze získat dva body navíc.

Doporučujeme **nejdříve** každou otázku alespoň **stručně zodpovědět** (tj. např. zformulovat tvrzení, uvést definici, apod.) a až když Vám zůstane čas, tak se pouštět do podrobnější odpovědi (tj. např. důkazu tvrzení, odvozování, apod.).

Každou otázku píše, prosím, na **jiný papír**, na který nezapomeňte napsat své **jméno**!