

## Markovovy řetězce se spojitým časem

**Definice 1** Buď  $\{X_t, t \geq 0\}$  homogenní Markovův řetězec se spojitým časem a pravděpodobnostmi přechodu  $p_{ij}(t) = P(X_{s+t} = j | X_s = i)$ ,  $s \geq 0, t > 0, i, j \in S$ , splňující  $\lim_{t \rightarrow 0+} p_{i,i}(t) = 1$  pro každé  $i \in S$ . Pak pro každý  $i \in S$  existuje limita

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} = q_i \leq \infty,$$

a pro každé  $i, j \in S, i \neq j$  existují limity

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{p_{ij}(h)}{h} = q_{ij} < \infty.$$

Čísla  $q_{ij}$  se nazývají intenzity přechodu ze stavu  $i$  do stavu  $j$ ,  $q_i$  se nazývá celková intenzita a  $Q = \{q_{ij}, i, j \in S\}$ , kde  $q_{ii} = -q_i$  se nazývá matice intenzit přechodu.

pozn. pro řetězce s konečnou množinou stavů platí  $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$ , pro všechna  $i \in S$ , pro ostatní řetězce to předpokládáme.

**Věta 3.5** Je-li  $q_i = 0$ , pak  $p_{ii}(t) = 1$  pro všechna  $t \geq 0$ . Je-li  $0 < q_i < \infty$ , má doba, po kterou řetězec setrvává ve stavu  $i$ , exponenciální rozdělení se střední hodnotou  $\frac{1}{q_i}$ .

**Věta 3.7** Nechť  $0 < q_i < \infty$ . Potom pravděpodobnost, že řetězec z počátečního stavu  $i$  přejde nejdříve do stavu  $j$ , je rovna  $\frac{q_{ij}}{q_i}$ , pro všechna  $j \neq i$ .

### Věta 3.10 (Kolmogorovovy diferenciální rovnice)

Předpokládejme, že  $q_i < \infty$  pro všechna  $i \in S$  a  $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$ , pro všechna  $i \in S$ .

Potom pravděpodobnosti přechodu  $p_{ij}(t)$  jsou diferencovatelné pro všechna  $i, j \in S$  a  $t > 0$  a pro všechna  $t > 0$  platí  $P'(t) = QP(t)$  (retrospektivní rovnice).

Je-li  $S$  konečná nebo je-li konvergence  $\frac{p_{ij}(h)}{h} \rightarrow q_{ij}$  stejnoměrná v  $i$ , potom pro všechna  $t > 0$  platí  $P'(t) = P(t)Q$  (prospektivní rovnice).

**Věta 3.11** Nechť  $Q = \{q_{ij}, 0 \leq i, j \leq N\}$  je matice, pro jejíž prvky platí

$$q_{ij} \geq 0, i \neq j \quad q_{ii} = -\sum_{i \neq j} q_{ij}.$$

Potom existuje jediné řešení Kolmogorovových diferenciálních rovnic, stejné pro obě soustavy, které vyhovuje počáteční podmínce  $P(0) = I$ , a které představuje soustavu pravděpodobností přechodu Markovova řetězce se spojitým časem a konečnou množinou stavů. Maticově lze toto řešení psát ve tvaru  $P(t) = e^{Qt}$ , kde  $e^{Qt}$  je maticová exponenciální funkce definovaná předpisem

$$e^{Qt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^k t^k}{k!}.$$

**Věta (Perronův vzorec pro holomorfní funkce)** Nechť  $f : U(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$  je holomorfní funkce na nějakém  $R$ -okolí nuly,  $0 < R \leq \infty$ , a buď  $A$  čtvercová matice s vlastními čísly  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  s násobnostmi  $m_1, \dots, m_k$ . Pokud  $|\lambda_j| < R$  pro všechna  $j = 1, \dots, k$ , potom

$$f(A) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{(m_j - 1)!} \frac{d^{m_j-1}}{d\lambda^{m_j-1}} \left[ f(\lambda) \frac{\text{adj}(\lambda I - A)}{\psi_j(\lambda)} \right] \bigg|_{\lambda=\lambda_j},$$

kde

$$\psi_j = \frac{\det(\lambda I - A)}{(\lambda - \lambda_j)^{m_j}}.$$

**Příklad 1** Na stavbě pracuje  $N$  svářečů, kteří náhodně a nezávisle odebírají proud. Svářeč, který v čase  $t$  neodebírá proud, začne v intervalu  $(t, t + h]$  proud odebírat s pravděpodobností  $\lambda h + o(h)$ ; svářeč, který v čase  $t$  proud odebíral, ukončí odběr v intervalu  $(t, t + h]$  s pravděpodobností  $\mu h + o(h)$ . Nechť  $X_t$  značí počet svářečů, kteří v čase  $t$  odebírají proud. Najděte matici intenzit Markovova řetězce  $\{X_t, t \geq 0\}$ .

**Příklad 2** Jaká je střední hodnota doby, kdy odebírá proud  $k$  svářečů? (a jaké má pravděpodobnostní rozdělení?)

**Příklad 3** Jaká je pravděpodobnost, že řetězec přejde ze stavu 1 nejdříve do stavu 2?

**Příklad 4** V obchodě pracují tři prodavačky. Pokud prodavačka právě někoho obsluhuje, pak pravděpodobnost, že zákazníka doobslouží v časovém intervalu  $(t, t + h]$  a nikoho obsluhovat nebude, je  $3h + o(h)$ . V intervalu  $(t, t + h]$  přijde jeden zákazník s pravděpodobností  $2h + o(h)$ , dva nebo více s pravděpodobností  $o(h)$  a žádný s pravděpodobností  $1 - 2h + o(h)$ . Předpokládejme, že zákazníci přicházejí zaměstnávat jednotlivé prodavačky nezávisle a rovněž ony se chovají nezávisle na svých kolegyních. Pokud všechny prodavačky obsluhují, nově příchozí zákazník odchází neobsloužen. Buď  $\{X_t, t \geq 0\}$  Markovův řetězec udávající počet prodavaček obsluhujících zákazníky v čase  $t$ . Najděte matici intenzit řetězce  $X_t, t \geq 0$ .

**Příklad 5** Na horskou chatu spolu vyjeli tři kamarádi. Při příjezdu na chatu v čase  $t = 0$  je jeden z nich nemocný. Vlastnosti nemoci jsou takové, že jsou-li spolu zdravý a nemocný jedinec, pak ten nemocný nakazí zdravého v časovém intervalu  $(t, t + h]$  s pravděpodobností  $\frac{1}{2}h + o(h)$ . Jedinec nemocný v čase  $t$  se naopak uzdraví v časovém intervalu  $(t, t + h]$  s pravděpodobností  $\frac{1}{3}h + o(h)$ . Uzdravování a infikování jednotlivých jedinců probíhá nezávisle (nakažený=infikovaný=nemocný). Zdravý jedinec nemůže nakazit nikoho. Nechť  $X_t$  udává počet nemocných kamarádů na chatě v čase  $t$ . Určete matici intenzit přechodu řetězce  $\{X_t, t \geq 0\}$  (rozmyslete si, že je to opravdu Markovův řetězec).

**Příklad 6** Uvažujme homogenní Markovův řetězec s maticí intenzit

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Spočtete odpovídající matici pravděpodobností přechodu  $P(t), t \geq 0$ .

**Příklad 7** Mějme dán homogenní Markovův řetězec s maticí intenzit

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix},$$

a počátečním rozdělením  $p(0) = (0, 1)$ . Spočítejte absolutní pravděpodobnosti v čase  $t$ .

**Příklad 8** Pro  $Q$  z příkladu 1 určete  $P(t)$  pro  $N = 1$  a obecné  $\lambda$  a  $\mu$  (porovnejte s Příkladem 3.4 ze skript).

(jsou minimálně 3 možnosti řešení - přímo vyřešit soustavu diferenciálních rovnic, spočítat přímo maticovou exponenciálu, nebo spočítat maticovou exponenciálu pomocí Perronova vzorce)

**Příklad 9** Určete hodnoty parametru  $q \in \mathbb{R}$ , pro které je matice

$$Q = \begin{pmatrix} -q & 1 & 0 \\ 0 & -q & q \\ 1 & -q & q - 1 \end{pmatrix}$$

matice intenzit přechodu pro nějaký Markovův řetězec se spojitým časem.