

Čísla s periodickým řetězovým rozvojem

Začneme jednoduchým příkladem.

Příklad: Určete hodnotu řetězového zlomku $[1; 1, 1, 1, \dots]$.

Řešení: Necht' α značí hledanou hodnotu. Pak 'vidíme', že $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$. Tedy α je řešením rovnice

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0,$$

proto platí $\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Protože $\alpha > 1$, musí být $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Optický argument použitý při odvození rovnosti $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$ je pochopitelně nekorektní, zkusme to napravit. Podle definice je $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n}$, kde $\frac{p_n}{q_n} = [1; 1, \dots, 1]$ je n -tý konvergent řetězového zlomku. Dále je $\frac{p_n}{q_n} = 1 + \frac{1}{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Všechny konvergenty jsou ≥ 1 a funkce $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ je spojitá na $\mathbb{R}^+$, takže lze psát

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{\alpha}.$$

Mějme nyní $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Řekneme, že α má čistě periodický řetězový rozvoj, pokud existují $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$ taková, že α je hodnotou řetězového zlomku $[a_0; \overline{a_1, \dots, a_k}, a_0]$ (tedy posloupnost $a_0, a_1, \dots, a_k$ se v řetězovém zlomku opakuje stále dokola).

Tvrzení: Necht' α je hodnotou čistě periodického řetězového zlomku. Potom α je kořenem kvadratického polynomu z $\mathbb{Q}[x]$.

Důkaz: Připomeňme, že $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je hodnotou jediného řetězového zlomku $[a_0; a_1, a_2, \dots]$, kde

$$\alpha_0 := \alpha, a_0 := [\alpha_0], \alpha_1 := (\alpha_0 - a_0)^{-1}, a_1 := [\alpha_1], \dots$$

Pokud máme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $[a_0; a_1, a_2, \dots] = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_k}, a_0]$, je $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k, \alpha_{k+1}]$, kde $\alpha_{k+1} = \alpha$ (využijeme jednoznačnost rozvoje do řetězového zlomku). Označme p_i, q_i posloupnosti, které dávají konvergenty řetězového zlomku $[a_0; a_1, a_2, \dots]$, tedy $p_{-2} = 0, p_{-1} = 1, p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}, i \in \mathbb{N}_0$ a $q_{-2} = 1, q_{-1} = 0, q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}, i \in \mathbb{N}_0$. Pak $\alpha = \frac{p_k \alpha_{k+1} + p_{k-1}}{q_k \alpha_{k+1} + q_{k-1}}$, kde $\alpha_{k+1} = \alpha$ (pro odvození této rovnosti lze též využít stejný argument jako v předchozím příkladu). Takže α splňuje rovnici

$$q_k \alpha^2 + (q_{k-1} - p_k) \alpha - p_{k-1} = 0,$$

kde $q_k \neq 0$.

Řekneme, že $\alpha \in \mathbb{R}$ je *kvadratické číslo*, pokud $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = 2$. Řekneme, že kvadratické číslo je redukované, pokud $\alpha > 1$ a $\alpha' \in (-1, 0)$, kde $\min_{\mathbb{Q}}(\alpha) = (x - \alpha)(x - \alpha')$ je minimální polynom α nad $\mathbb{Q}$.

Pro kvadratické číslo α bude α' značit druhý kořen polynomu $\min_{\mathbb{Q}}(\alpha)$.

Příklad: Pro $N \in \mathbb{N}$ nečtverec není kvadratické číslo $\sqrt{N}$ redukované, protože $\sqrt{N}' = -\sqrt{N} \notin (-1, 0)$. Naproti tomu $\sqrt{N} + [\sqrt{N}]$ redukované je, protože $(\sqrt{N} + [\sqrt{N}])' = -\sqrt{N} + [\sqrt{N}] \in (-1, 0)$.

Nyní již můžeme charakterizovat čísla s čistě periodickým řetězovým rozvojem.

Věta: Necht' $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pak α je hodnotou čistě periodického řetězového zlomku právě když α je redukované kvadratické číslo.

Důkaz: Předpokládejme, že α je hodnotou čistě periodického řetězového zlomku. Pak α je kořen rovnice $q_k \alpha^2 + (q_{k-1} - p_k) \alpha - p_{k-1} = 0$, kde můžeme předpokládat, že $p_{k-1}, q_k \in \mathbb{N}$. Dále je jistě $\alpha > 1$, zbývá si rozmyslet $\alpha' \in (-1, 0)$. Platí $-\frac{p_{k-1}}{q_k} = \alpha \alpha'$, takže $\alpha' < 0$. Dále máme $-\alpha - \alpha' = \frac{q_{k-1} - p_k}{q_k} = \frac{q_{k-1}}{q_k} - \frac{p_k}{q_k}$. Proto je $\alpha' = -\alpha + \frac{p_k}{q_k} - \frac{q_{k-1}}{q_k} \geq -\frac{1}{q_k} - \frac{q_{k-1}}{q_k} = -\frac{q_{k-1} + 1}{q_k} \geq -1$.

Opačnou implikaci dokážeme v několika krocích:

1. Je-li α redukované kvadratické číslo, pak existují $R, S, D \in \mathbb{N}$ taková, že $\alpha = \frac{R + \sqrt{D}}{S}$ a S dělí $D - R^2$.

Víme, že α je kořenem kvadratické rovnice $x^2 - bx - c = 0$, kde b, c jsou kladná racionální čísla (kladná, protože α je redukované). Pak je $\alpha = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}$ (znaménko $+$, aby bylo $\alpha > 0$). Necht' je $b = \frac{b_1}{b_2}$ a $c = \frac{c_1}{c_2}$ pro $b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{N}$. Pak

$$\alpha = \frac{b_1 c_2 + \sqrt{b_1^2 c_2^2 + 4 c_1 c_2 b_2^2}}{2 b_2 c_2}.$$

Pak položíme $R = b_1 c_2, D = b_1^2 c_2^2 + 4 c_1 c_2 b_2^2, S = 2 b_2 c_2$.

2. Je-li α redukované kvadratické číslo, je rovněž $\beta := (\alpha - [\alpha])^{-1}$ redukované kvadratické číslo: Necht' $K = \mathbb{Q}[\alpha]$ a $\varphi \in \text{Aut}(K)$ je automorfismus K definovaný vztahem $\varphi(\alpha) = \alpha'$. Pak $\beta \in K$ a protože $\beta \notin \mathbb{Q}$, je $K = \mathbb{Q}[\beta]$. Pak φ permutuje kořeny polynomu $\min_{\mathbb{Q}}(\beta)$, takže $\varphi(\beta) = \beta' = (\alpha' - [\alpha])^{-1}$. Ze vztahu $\beta = (\alpha - [\alpha])^{-1}$ máme $\beta > 1$ a ze vztahů $\beta' = (\alpha' - [\alpha])^{-1}$ a $\alpha' \in (-1, 0)$ máme $\beta' \in (-1, 0)$.

3. Označme $\alpha_0, \alpha_1, \dots, a_0, a_1, \dots$ posloupnosti vzniklé při rozvoji α do řetězového zlomku. Pak existují celá čísla $R_n, S_n \neq 0, D, n \in \mathbb{N}_0$, taková, že $\alpha_n = \frac{R_n + \sqrt{D}}{S_n}$.

Čísla R_0, S_0, D zvolíme jako v kroku 1, tedy máme splněnou i podmínku $S_0 | D - R_0^2$. Dále definujeme rekurzivně $R_{n+1} = a_n S_n - R_n, S_{n+1} = \frac{D - R_{n+1}^2}{S_n}$. K těmto vzorcům se dopracujeme stejně jako na přednášce při počítání rozvoje $\sqrt{N}$. Tedy

$$\alpha_{n+1} = \left(\frac{R_n + \sqrt{D}}{S_n} - a_n \right)^{-1} = \frac{S_n}{R_n - a_n S_n + \sqrt{D}} \frac{R_n - a_n S_n - \sqrt{D}}{R_n - a_n S_n - \sqrt{D}} = \frac{-S_n(a_n S_n - R_n + \sqrt{D})}{(a_n S_n - R_n)^2 - D} = \frac{R_{n+1} + \sqrt{D}}{S_{n+1}}$$

Potřebujeme dokázat, že S_n je vždy celé číslo. Pro $n = 0$ je to jasné z definice, pro $n = 1$ je $D - R_1^2 = D - (a_0 S_0 - R_0)^2 = D - R_0^2 + S_0(2R_0 a_0 - a_0^2 S_0)$ je násobek S_0 .

Pro $n > 1$ pak postupujeme indukcí a využitím vztahu $S_{n-1} S_{n-2} = D - R_{n-1}^2$. Tedy $D - R_n^2 = D - R_{n-1}^2 + S_{n-1}(2R_{n-1} a_{n-1} - a_{n-1}^2 S_{n-1}) = S_{n-1}(S_{n-2} + 2R_{n-1} a_{n-1} - a_{n-1}^2 S_{n-1})$.

4. Pro R_n, S_n nalezená v předchozím kroku je $R_n, S_n > 0, \sqrt{D} > R_n, 2\sqrt{D} > S_n$. Podle kroku 2 je $\alpha_n \alpha'_n < 0$, takže $\frac{R_n^2 - D}{S_n^2} < 0$, tedy $|R_n| < \sqrt{D}$. Dále je $S_n S_{n-1} = D - R_n^2 > 0$ a protože je $S_0 > 0$, je taky $S_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dále je $\alpha_n + \alpha'_n > 0$, tedy $2\frac{R_n}{S_n} > 0$, takže také $R_n > 0$. Nakonec z $\frac{R_n + \sqrt{D}}{S_n} \geq 1$ máme $S_n \leq R_n + \sqrt{D} \leq R_n + \sqrt{D} \leq 2\sqrt{D}$.

5. Existují $m < n$ taková, že $\alpha_m = \alpha_n$. Toto je jasné, protože upořádaná dvojice (R_n, S_n) může nabývat pouze konečně mnoha hodnot.

6. Pokud $\alpha_m = \alpha_n$ a $m, n > 0$, pak také $\alpha_{m-1} = \alpha_{n-1}$: Máme $\alpha_n = (\alpha_{n-1} - a_{n-1})^{-1}$, takže $\alpha_{n-1} = \frac{1}{\alpha_n} + a_{n-1}$. Dále je $\alpha'_{n-1} = \frac{1}{\alpha'_n} + a_{n-1}$. Prvek α_{n-1} lze tedy určit z α_n takto: K $\frac{1}{\alpha_n}$ přičteme kladné celé číslo tak c , aby $\frac{1}{\alpha_n} + c$ leželo v intervalu $(-1, 0)$. Z toho již plyne požadované.

Závěr ukázali sme, že existuje $k > 0$ takové, že $\alpha_0 = \alpha_k$. Pak je jasné, že řetězový rozvoj $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ čísla α splňuje $a_i = a_{i+k}$ pro každé $i \in \mathbb{N}_0$.