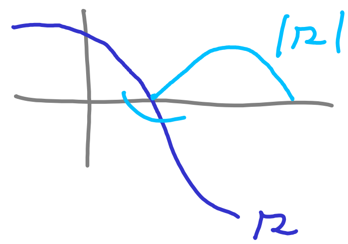
Tvrzení. $f = f(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lipschitzovské vůči y (tj. $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$)

$\Rightarrow$ jednoznačnost řešení $\boxed{\begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}}$

Dk.

$$u(x) := \overbrace{|y_1(x) - y_2(x)|}^{\exists \frac{d}{dx}}$$



$$u'_+(x) \leq L\, u(x)$$

$$u'_+(x) - L u(x) \leq 0 \quad \Big/ \; e^{-Lx} \text{ ... integrační faktor}$$

$$\underbrace{u'_+(x) e^{-Lx} + (-L e^{-x}) u(x)}_{=} \leq 0$$

$$\left(u(x) e^{-Lx}\right)'_+ \leq 0$$

Věta I $\Rightarrow$ $x \longmapsto u(x) e^{-Lx}$ nerostoucí

tj. $u(x_1) e^{-Lx_1} \leq u(x_0) e^{-Lx_0}$

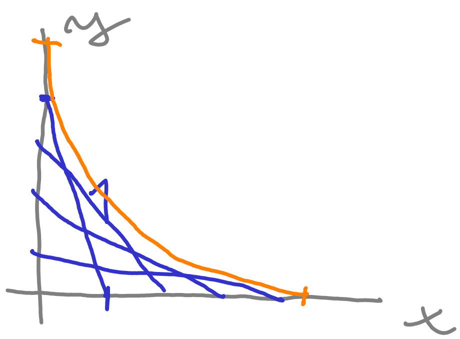
pro $\forall x_0 \le x_1$

$$u(x_1) \le e^{L(x_1 - x_0)} u(x_0)$$

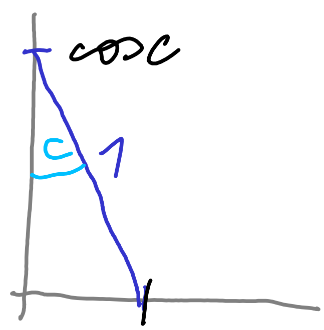
$$|y_1(x_1) - y_2(x_1)| \le e^{L(x_1 - x_0)} \cdot |y_1(x_0) - y_2(x_0)|$$

$\Rightarrow$ jednoznačnost : $\square$

Poznámka: astroida (a obálky obecně).

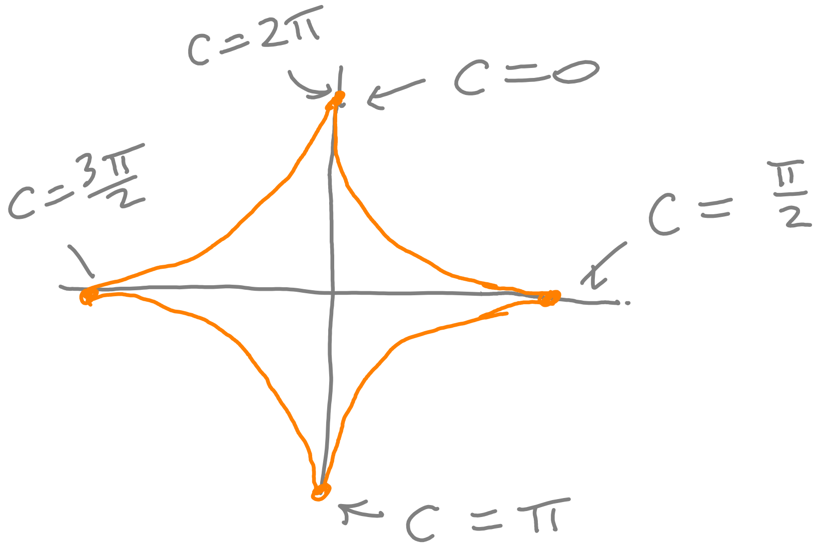


parametrizace



$$\left[\begin{aligned} y &= \cos c\left(1 - \frac{x}{\sin c}\right) \\ 0 &= -\sin c + \frac{x}{\sin^2 c} \end{aligned}\right] \Bigg/ \frac{\partial}{\partial c}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= \sin^3 c \\ y &= \cos^3 c \end{aligned} \qquad c \in \mathbb{R}}$$



Kartézské souřadnice:

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=1$$

Pozn.: kdy je křivka $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $c\mapsto(y(c),x(c))$ „pěkná"?

VoIF: postačující podm.: $\boxed{\varphi'(c)\neq 0 \text{ zajistí}}$

(věta o implicitní fci)

př: $\varphi(c)=(\sin^3 c,\cos^3 c)$

$$\varphi'(c)=(3\sin^2 c\cdot\cos c,-3\cos^2 c\cdot\sin c)$$

$$\neq 0 \Longleftrightarrow c\neq k\frac{\pi}{2}$$

---

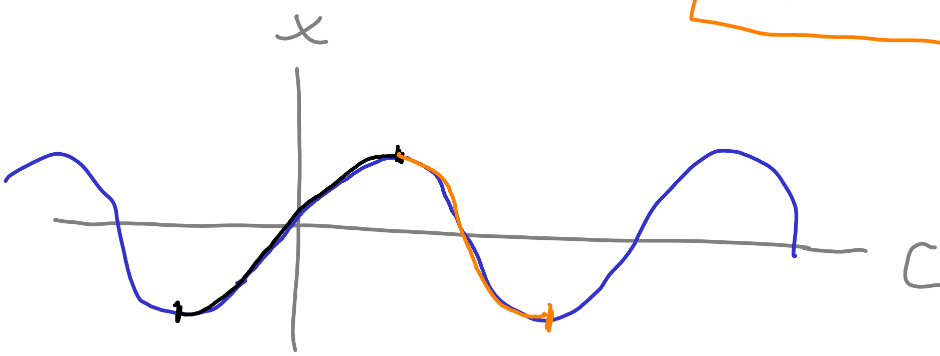
ad VIII.9.2. $y=xy'+\cos(y')$

obecné řeš.: $\boxed{y=cx+\cos(c),\ c\in\mathbb{R}}$

otázka: $\boxed{0 = x - \sin c}$

$x = \sin c \Rightarrow$ $c = \arcsin$

$\boxed{c = \pi - \arcsin x}$



---

ad věci III. Čebyševova věta

$\exists\, C_1, C_2 > 0$ t.ž. $\pi(x) \geq C_1 \dfrac{x}{\ln x}$

$\leq C_2 \dfrac{x}{\ln x}$

dk ....

$$\binom{n}{k} = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_N^{n_N}$$

kde r_j ... prvočísla $\le n$

$\mu_j \in \mathbb{Z}$ exponenty

Platí: 0) $r_j \le n$

i) $r_j > \max\{k, n-k\}$

$\Rightarrow \mu_j = 1$

ii) $\mu_j \ge 0$ $\left(\Leftarrow \binom{n}{k} \in \mathbb{N} \right)$

iii) $r_j^{\mu_j} \le n \quad \forall j$

Dk: 1. pomocná úloha: faktoriál

$$n! = 2^{\nu_2} \cdot 3^{\nu_3} \cdot \ldots \cdot p^{\nu_p}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
n! = & 1 \cdot & 2 \cdot & 3 \cdot & 4 \cdot & 5 \cdot & 6 \cdot & 7 \cdot & 8 \cdot & 9 \cdot & 10 & \ldots \\
\hline
 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & \\
 & & & & 2 & & & & 2 & & &
\end{array}$$

2

ν_2 = počet násobků $2 \leq n$ (1. řádek)

$+$ počet násobků $4 \leq n$ (2. řádek)

$+$ počet nás. $8 \leq n$ (3. řádek)

$$= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + \cdots$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^j} \right\rfloor$$

Pozn. 1) Legendreova formule

2) $\nu_p = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^j} \right\rfloor$

3) stačí sčítat pro j t. ž. $2^j \leq n$ $\left(\Leftrightarrow j \leq \frac{\ln n}{\ln 2} \right)$

2. aplikujeme $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$$\nu_2\left(\binom{n}{k}\right) = \nu_2(n!) - \nu_2(k!) - \nu_2((n-k)!)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^j} \right\rfloor - \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{k}{2^j} \right\rfloor - \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n-k}{2^j} \right\rfloor$$

Legendre

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^j} \right\rfloor - \left\lfloor \underbrace{\frac{k}{2^j}}_{=x} \right\rfloor - \left\lfloor \underbrace{\frac{n-k}{2^j}}_{=y} \right\rfloor \right)$$

jsem hotov ! (téměř)

$$\lfloor x+y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$$
$$\leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

$$\Rightarrow \quad \nu_2(\quad) \geq 0$$

$$\leq \frac{\ln n}{\ln 2}$$

$\square$

Téma: zobecněné řady

Známe: $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

(kde $a_k \in \mathbb{R}$ či $\mathbb{C}$)

Chceme: $\sum_{i\in\mathcal{A}} a_i$, kde $\mathcal{A}$ -- libovolná množina

$a_i \in \mathbb{C}$

Def. Symbol $\sum_{i\in\mathcal{A}} a_i$ definuji jako

1. $a_i \geq 0$:

$$\sup\Big\{\sum_{i\in A} a_i \,;\, A \in \overbrace{\mathcal{P}_K(\mathcal{A})}^{\text{systém všech konečných podmnožin } \mathcal{A}}\Big\}$$

2. $a_i \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{\substack{i\in\mathcal{A}\\ a_i>0}} a_i - \Big(\sum_{\substack{i\in\mathcal{A}\\ a_i<0}} (-a_i)\Big)$$

má-li P.S. smysl

3. $a_i \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{i \in A} \operatorname{Re}(a_i) + i \sum_{i \in A} \operatorname{Im}(a_i)$$

má-li P.S. smysl.

Pozn. 1) omezíme se na $a_i \geq 0$, obecně viz Jarník, D II.

2) A nespočetné? nemá smysl:

$$\sum_{i \in A} a_i < +\infty \Rightarrow a_i > 0 \text{ jen pro spočetně indexů}$$

$(a_i \geq 0)$

Lemma. Nechť $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots$.

Pak $\displaystyle\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Dk. $LS = \sup \left\{ \sum_{i \in A} a_i \; ; \; A \subseteq \mathbb{N} \text{ konečné} \right\}$

$$PS = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i}_{} =$$

$$= \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \; ; \; n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$= \sup \left\{ \sum_{i \in A} a_i \; ; \; A = \{1, 2, \dots n\} \right\}$$

$\Rightarrow \quad LS \geq PS$ ... jasné

$\boxed{\leq}$ ... složité

$A \subset \mathbb{N}$ konečné: volme $n = \max A$

$$\sum_{i \in A} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$\square$

Aplikace. III.2 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+q_n) = \dots$??

↑ lze roznásobit

Zkusme:

$$(1+q_1)(1+q_2)(1+q_3)\cdots\cdots$$

$$= 1 + q_1 + q_2 + \cdots\cdots$$

$$+ q_1 q_2 + q_1 q_3 + \cdots\cdots$$ všechny konečné součiny $q_{j_1} q_{j_2} \cdots$

Věta Nechť $q_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q_n) = \sum_{A \in \underbrace{\mathcal{P}_K(\mathbb{N})}_{}} \left(\prod_{i \in A} q_i \right).$$

↖ spočetné množině !!

Dk.: $LS = \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} (1+q_n)$

ale: $\prod_{n=1}^{m}(1+q_n) = \sum_{A\in\mathcal{P}(\{1,\dots,m\})} \prod_{i\in A} q_i$

$\leq PS$

$\geq$ $\square$

Příklad. $\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+x^{(2^k)}\right)$, $x\in(0,1)$

$$= \sum_{A\in\mathcal{P}_K(\mathbb{N}_0)} \prod_{i\in A} x^{(2^i)} = \sum_{A\in\mathcal{P}_K(\mathbb{N}_0)} x^{\left(\sum_{i\in A} 2^i\right)}$$

předchozí lemma

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\} = \{0,1,2,\dots\}$

Další pozn.: $\left\{ \sum_{i \in A} 2^i \;;\; A \in \mathcal{P}_K(\mathbb{N}_0) \right\}$

$\updownarrow$ 1-1 dvojkový rozvoj

$\mathbb{N}$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} t^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-t}$$

$\square$