1.3.2021

Téma: Cauchyova funkcionální rovnice

$$(C) \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Tvrzení 1

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, splní (C), navíc

(i) f spojité aspoň v jednom bodě, nebo

(ii) f omezené na nějakém intervalu, nebo

(iii) f monotónní na nějakém intervalu

$$\Longrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \text{ t.ž. } f(x) = cx, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tvrzení 2

$\exists f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, splňující (C),
leč není spojité v žádném bodě
(tedy nelineární, ...)

Fakta z LA

1) každý vekt. prostor má bázi, tj.

X vekt. pr. nad $T \Rightarrow \exists \mathcal{B} \subset X$ t.ž. $\forall x \in X$ lze psát (jediným způsobem)

$$x = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j, \quad \alpha_j \in T, \ x_j \in \mathcal{B}$$

Zornovo lemma

$\Uparrow$

AC

2) X, Y ... vekt. pr. nad T

$B \subset X$ báze

$\tilde{f} : B \to Y$ $\Rightarrow$ $\exists!\ f : X \to Y$

s.ž. $f|_B = \tilde{f}$

f lineární nad T

$\big(f(ax + by) = a f(x) + b f(y)$

$\forall x, y \in X$

$\forall a, b \in T \big)$

Dk. J.2 IDEA: uvažuji $\mathbb{R}$ coby vekt. pr. nad $\mathbb{Q}$

buď B nějaká báze

1. KROK B nespočetná

?? B spočetné, ale pak jsou spočetné:

$B \times \mathbb{Q}$

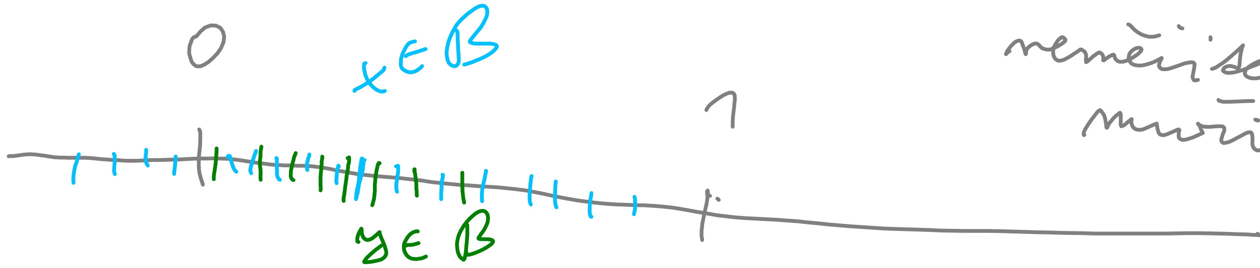
$\mathcal{P}_N(B \times \mathbb{Q})$ ... N-prvkové podmnožiny $B \times \mathbb{Q}$

$\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_N(B \times \mathbb{Q})$

$$\varphi : \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \mathcal{P}(B\times\mathbb{Q}) \xrightarrow{(1-1)} \mathbb{R} \quad \text{nespočetná}$$

$$\begin{matrix} x_1, \dots x_N \\ \alpha_1, \dots \alpha_N \end{matrix} \longmapsto \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j$$

Pozn.: „paradoxní rozklad $\mathbb{R}$" (Banach–Tarski neměřitelné množiny)



$$N_x = \{\alpha x,\ \alpha\in\mathbb{Q}\} \quad \dots \text{ husté v } \mathbb{R}$$

$$N_y = \{\alpha y,\ \alpha\in\mathbb{Q}\} \quad \dots \quad \text{— " —}$$

ale disjunktní

2. KROK BÚNO $B \subset (0,1)$

($x \in B$ nahraď αx, $\alpha\in\mathbb{Q}$)

volme $\tilde{f} : B \to \mathbb{R}$, neomezené

$\exists\ f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, rozšíření $\tilde{f}$ lineární nad $\mathbb{Q}$

speciálně : $f(1\cdot x + 1\cdot y) = 1\cdot f(x) + 1\cdot f(y)$

tj. (c) platí. $\square$