Úmluva. Uvažujeme pouze řady s kladnými členy.

Tvrzení 1. [Zlomkové kritérium.] Jsou dány řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Nechť od jistého $n \geq n_0$ platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Potom:
(i) jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
(ii) jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.

Tvrzení 2. [Raabeho kritérium.] Je dána řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Potom:
(i) jestliže $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;
(ii) jestliže $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$ od jistého $n \geq n_0$, speciálně pokud $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

. . . .

IV.1 Dokažte Raabeho kritérium.

IV.2 Ukažte na příkladech, že Raabeho kritérium je jemnější než podílové kritérium.[1]

* Najděte příklad řady, o jejíž konvergenci nelze rozhodnout ani Raabeho kritériem.

IV.3 Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Potom též řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ diverguje, kde $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

IV.4 Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Sestrojte posloupnost $c_n \geq 0$, $c_n \to \infty$ takovou, že $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ konverguje.

[1] Podrobněji řečeno: pokud konvergence/divergence plyne z podílového kritéria, plyne též z Raabeho kritéria. Zároveň existuje řada, jejíž konvergenci nelze vyšetřit podílovým kritériem, avšak Raabeho kritériem ano.

IV.1 použijte zlomkové kritérium k porovnání s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$
IV.3 Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ konverguje. Pak existuje n_0 takové, že pro každé $m \geq n_0$ je $\sum_{n=n_0}^{m} \frac{a_n}{s_n} \leq 1/2$ a odvoďte spor.
IV.4 Položme a držme hodnotu $c_n = 0$. Ve vhodnou chvíli (kdy?) lze navýšit na $c_n = 1$, později na $c_n = 2$ atd. a to tak, že dokonce $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n \leq 1$.