Připomeňme Stirlingovu formuli

$$n! \approx \sqrt{2\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}, \qquad n \to \infty$$

čímž míníme, že limita podílu obou výrazů je 1.

II.1 Ukažte, že $(1+1/n)^n$ aproximuje e zdola a roste, zatímco $(1+1/n)^{n+1}$ aproximuje e shora a klesá. Ukažte, že kompromisní $(1+1/n)^{n+1/2}$ aproximuje e rychleji než předešlé posloupnosti.

Definice. Nekonečným součinem rozumíme

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} a_n$$

pokud limita napravo existuje a je konečná *a nenulová.* V takovém případě součin nazveme konvergentní. BÚNO předpokládáme vždy $a_n > 0$.

II.2 Ukažte, že nutnou (leč nikoliv postačující) podmínkou konvegence nekonečného součinu je $a_n \to 1$.

II.3 Součin $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když řada $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ konverguje.

Jestliže b_n nemění znamení, pak součin $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ konverguje, právě když řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konveguje.

II.4 Nechť součiny $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$, $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ konvergují. Co lze říci o konvergenci (hodnotě) součinů

$$\prod_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n) \qquad \prod_{n=1}^{\infty} p_n^2 \qquad \prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n} \qquad ?$$

II.5* Vypočtěte

$$(a)\quad \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \qquad (b)\quad \prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1} \qquad (c)\quad \prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{2n}}\right)$$

Ukažte, že

$$(d)\quad \prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x} \qquad (e)\quad \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots$$

Nápověda / řešení viz druhá strana.

II.1 Pište $(1 + 1/n)^n = \exp(f(1/n))$, a vyšetřujte chování funkce $f(x)$ např. pomocí Taylorových polynomů.
Ukažte, že $f(x) \sim 1 - x/2$, podobně pro ostatní případy. Pokuste se nahradit řádovou rovnost odhadem platným pro všechna $x \in (0, 1)$, s co nejlepší konstantou.

II.2 Vyjděte z analogie k nekonečným řadám, případně použijte výsledek bodu 3.

II.3 Uvažte logaritmus posloupnosti částečných součinů. Použijte srovnávací kritérium.

II.4 Užijte bod 2, resp. aritmetiku nekonečných součinů.

II.5 (a) 1/2, (b) 2/3, (c) ???