Představme si svět, ve kterém je povoleno používat pouze *pravostranné* derivace, tj.

$$f'_+(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

I.1 Platí v tomto světě Rolleova resp. Lagrangeova věta ?

I.2 Nechť $f'_+(x) = 0$ v (a, b). Je potom f na (a, b) konstantní ?

I.3 Ukažte, že zůstává v platnosti následující věta o vztahu monotonie a derivace: je-li f spojitá v I a existuje-li f'_+ v každém vnitřním bodě I, pak $f'_+ > 0$ (respektive $f'_+ \geq 0$, $f'_+ = 0$, $f'_+ \leq 0$, $f'_+ < 0$) implikuje, že f je rostoucí (respektive neklesající, konstantní, nerostoucí, klesající) v I.

I.4 Ukažte následující „jednostrannou Rolleovu větu": je-li f spojitá na I a $f'_+ \leq M$ (respektive $f'_+ \geq M$) uvnitř I, pak

$$f(x_1) - f(x_0) \leq M(x_1 - x_0)$$

respektive

$$f(x_1) - f(x_0) \geq M(x_1 - x_0)$$

pro všechna $x_0 < x_1 \in I$.

I.5* Nechť f je spojitá v (a, b). Nechť f'_+ existuje a navíc je spojitá všude v (a, b). Potom existuje f' (oboustranná derivace) všude v (a, b).

I.6 Nechť existuje $f'_+(a)$. Potom existuje také $|f|'_+(a)$ a platí

$$|f|'_+(a) = \begin{cases} f'_+(a) \cdot \operatorname{sgn} f(a), & f(a) \neq 0 \\ |f'_+(a)|, & f(a) = 0 \end{cases}$$

Speciálně vždy platí odhad $\big||f|'_+(a)\big| \leq |f'_+(a)|$.

Nápověda / řešení viz druhá strana.

I.1, I.2 ... ne

Lemma 1. [„Plížívé lemma“]. Nechť množina $M \subset [a, b]$ splňuje:

1. $a \in M$
2. $x_0 \in M$, $x_0 < b \implies \exists \delta > 0$ tak, že $x_0 + \delta \in M$
3. $x_n \in M$, $x_n \to x_0 \implies x_0 \in M$

Potom též $b \in M$. *(Důkaz: ukažte, že $s = \sup M$ je prvkem $[a, b]$. Dále, že $s \in M$ (předpoklad 3), tj. s je největší prvek M. Konečně, že nutně $s = b$ (předpoklad 2).)*

Lemma 2. Nechť $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ je spojitá a $f'_+(x) > 0$ pro každé $x \in [x_1, x_2)$. Potom $f(x_1) \leq f(x_2)$. *(Důkaz 1: aplikuj plížívé lemma na množinu $M = \{x \in [x_1, x_2];\ f(x_1) \leq f(x)\}$. Důkaz 2: (TRIK) uvažuj x_0 bod maxima f na $[x_1, x_2]$. Nemůže být $x_0 < x_2$, proč? Tedy $x_0 = x_2$ a jsem hotov.)*

I.3, I.4 Lemma 2 řeší implikaci $f'_+ > 0 \implies f$ neklesající. Ostatní případy pomocí $f \pm \epsilon x$, $\epsilon \to 0$, respektive $f \pm Mx$.