Definice. Funkce $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se nazve spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^n$, jestliže:

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[\|x - x_0\| < \delta \implies \|F(x) - F(x_0)\| < \varepsilon\big]$$

kde $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ je příslušná norma v $\mathbb{R}^n$.

. . . .

Tvrzení VII.1. Nechť $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^n$, nechť $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ je spojitá v bodě $y_0 = F(x_0) \in \mathbb{R}^m$. Pak $G \circ F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je spojitá v bodě x_0.

VII.2. Ukažte z definice: je-li $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá v bodě x_0, je $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definovaná jako $\varphi(x) = (x, y(x))$, spojitá v bodě x_0.

VII.3. [Princip lepení.] Mějme funkci $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ a bod $c \in (a, b)$. Nechť platí:

1. y je řešení rovnice $y' = f(x, y)$ na (a, c) i na (c, b)
2. y je spojitá v bodě c, f je spojitá v bodě $(c, y(c)) \in \mathbb{R}^2$

Potom y je řešení dané rovnice na celém (a, b).

VII.4. Najděte příklad funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nespojité v bodě 0 tak, že rovnice $y' = f(y)$ s počáteční podmínkou $y(0) = 0$ nemá řešení na žádném okolí bodu 0.

VII.5. Nechť $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou spojité. Potom podmínku splnění rovnice

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad \forall x \in (a, b)$$

lze oslabit následujícím způsobem:

i) uvažujeme pouze pravostrannou derivaci

ii) vynecháme konečnou množinu $N \subset (a, b)$

*iii) lze vynechat spočetnou množinu?

*iv) lze vynechat nulovou množinu?

VII.5 speciální (fakticky ekvivalentní) případ je: jsou-li y, h spojité, pak definici „y je primitivní funkce k h na (a, b)" lze oslabit analogickým způsobem.