1. Příklad. (a) Dodefinovat spojitě = dodefinovat vlastní limitou (ta musí existovat). Počítejme zkusmo limity ve směru:

$$f(t,0) = \frac{\ln(1+at^2)}{2t^2} \to \frac{a}{2}\,, \qquad t \to 0$$
$$f(0,t) = \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} \to 1\,, \qquad t \to 0$$

Tedy jedinými možnými kandidáty jsou $a = 2$ a $f(0,0) = 1$. Je však třeba ověřit (z předchozích výpočtů to ještě neplyne!), že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+2x^2+y^2)}{2x^2+y^2} = 1\,.$$

Užijeme známou limitu $\frac{\ln(1+z)}{z} \to 1$ pro $z \to 0$ a větu o limitě složené funkce. Předpoklady: $2x^2+y^2 \to 0$ pro $(x,y) \to (0,0)$, ale zároveň $2x^2+y^2 \neq 0$ ("vyhýbá se" limitní hodnotě) pro $(x,y) \neq (0,0)$.

(b) Pozor: $(x,y) \to \infty$ značí $x^2+y^2 \to \infty$, což není ekvivalentní výrokům $x \to \infty$, $y \to \infty$.
Užijeme polární souřadnice $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$. Pokud limita existuje za předpokladu $r \to \infty$, zatímco ϕ se mění libovolně, je to hledaný výsledek. Vidíme, že platí

$$r^2 \le 2r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi \le 2r^2\,.$$

Tedy

$$0 \le \frac{\ln(1+2r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi)}{2r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi} \le \frac{\ln(1+2r^2)}{r^2} \to 0 \qquad r \to \infty$$

Všimněte si, že čitatele odhadujeme seshora, jmenovatele zespoda. Poslední limita plyne např. z l'Hospitalova pravidla.

(c) Počítejme podle definice

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big[f(t,0) - f(0,0)\big] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\frac{\ln(1+2t^2)}{2t^2} - 1\right]$$

Pomocí Taylorova rozvoje $\ln(1+z) = z - z^2/2 + o(z^2)$ jde o limitu výrazu

$$\frac{1}{t}\left[\frac{2t^2 - (2t^2)^2/2 + o(t^4)}{2t^2} - 1\right] = -t + o(t) \to 0 \qquad t \to 0$$

Tedy $f_x(0,0) = 0$ a podobně se spočítá $f_y(0,0) = 0$.
Pozor: mechanické derivování (jakožto podílu) nelze v bodě $(0,0)$ použít - jmenovatel je totiž nula.

(d) Dle předchozího je kandidátem na totální diferenciál nulové zobrazení. Je tedy třeba ověřit, že výraz

$$\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\big[f(h,k) - f(0,0)\big] = \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left[\frac{\ln(1+2h^2+k^2)}{2h^2+k^2} - 1\right]$$

jde do nuly pro $(h,k) \to (0,0)$. Inspirováni předchozími výpočty víme, že

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\left[\frac{\ln(1+t^2)}{t^2} - 1\right] \to 0 \quad t \to 0+\,. \qquad (*)$$

Přepíšeme studovaný výraz jako

$$\left\{\frac{\sqrt{2h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}\right\}\left\{\frac{1}{\sqrt{2h^2+k^2}}\left[\frac{\ln(1+2h^2+k^2)}{2h^2+k^2} - 1\right\}\right]$$

Druhá složená závorka jde k nule díky (*) a větě o limitě složené funkce. Avšak první složená závorka je omezená, neboť (pro $(h,k) \neq (0,0)$)

$$1 \leq \frac{2h^2+k^2}{h^2+k^2} \leq 2\,.$$

2. Příklad. Hledejme integrační faktor $\phi = \phi(x)$. Podmínka exaktnosti vede na rovnici

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\Big[\phi(x)\big(x^2-3y^2\big)\Big] &= \frac{\partial}{\partial x}\Big[\phi(x)\big(x^4+2xy\big)\Big]\\ 0 &= \phi'(x)\big[x^4+2xy\big] + \phi(x)\big[4x^3+8y\big]\\ 0 &= \phi'(x) + \frac{4}{x}\phi(x)\\ \phi(x) &= x^{-4}\end{aligned}$$

(Nehledám obecné, ale libovolné netriviální řešení této rovnice.) Po násobení faktorem mám

$$\left(\frac{1}{x^2} - \frac{3y^2}{x^4}\right)dx + \left(1 + \frac{2y}{x^3}\right)dy = 0$$

Hledaný potenciál:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{1}{x^2} - \frac{3y^2}{x^4} \\ V &= \frac{y^2}{x^3} - \frac{1}{x} + c(y) \end{aligned}$$

(Integrujeme pro pevné y podle x, tedy integrační konstanta obecně závisí na y.) Derivujeme podle y a srovnáme s rovnicí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{2y}{x^3} + c'(y) = 1 + \frac{2y}{x^3} \\ c'(y) &= 1 \\ c(y) &= y + C \end{aligned}$$

Tedy řešení rovnice jsou dána implicitně podmínkou $\frac{y^2}{x^3} - \frac{1}{x} + y + C = 0$. Pozor: pokud bychom předpokládali $\phi = \phi(y)$, dojdeme k rovnici pro $\phi'(y)$, která stále obsahuje x. Jejím integrováním tedy získáme faktor, závislý na x - to odporuje výchozímu předpokladu!

3. Příklad. Řešením soustavy

$$\begin{aligned} 0 &= F_x = 3x^2 - 3z \\ 0 &= F_y = 2y - 2 \\ 0 &= F_z = z + 2 - 3x \end{aligned}$$

vyplynou podezřelé body: $A = [1, 1, 1]$, $B = [2, 1, 4]$. Matice druhých derivací je

$$\nabla^2 F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

V bodě A je indefinitní (sedlový bod), v bodě B pozitivně definitní (lokální minimum). Volba $F(x, 0, 0) = x^3$ ukazuje, že extrém není globální (funkce je neomezená shora i zdola.)