

1. Vypočítejte $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)}$

(a)

$$\frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

(b)

$$\frac{\ln(1 + x^2 + y^2)}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}$$

(c)

$$\frac{1}{x^2 + y^4}$$

(d)

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

(e)

$$\frac{x^2 y}{x^2 + y^4}$$

(f)

$$(x^2 + y^2)^{xy}$$

(g)

$$\frac{\sin(x^2 + y^4)}{3x^2 + ay^4}, \quad a > 0$$

(h)

$$\frac{x^2 + ay^2}{\exp(2x^2) - \exp(-y^2)}, \quad a > 0$$

2. Vypočítejte $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty}$

(a)

$$\frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$$

(b)

$$\frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$$

(c)

$$\frac{x^2 + y^4}{x^4 + y^2}$$

(d)

$$\frac{1}{1 + x^2}$$

(e)

$$\frac{xy \sin x}{\operatorname{arctg}(x^2 + y^2)}$$

(f)

$$\sqrt[3]{x^2} \sin\left(\frac{1}{|x| + |y|}\right)$$

3. Určete parciální derivace a totální diferenciál funkcí všude, kde existují.

(a) $x^4 + y^4 + 4xy^2$

(d) x^y

(b) $x \sin(x + y)$

(e) $\frac{x}{y}$

(c) $\ln(x^2 + y^2)$

(f) $\frac{ax+by}{cx+dy}$ ($abcd$ jsou konstanty).

4. U všech funkcí sub 3 ověřte záměnnost druhých parciálních derivací.

5. Vyšetřete existenci a spojitost parciálních derivací a existenci totálního diferenciálu v bodě $(0, 0)$ u funkcí

(a)

$$\sqrt{|xy|}$$

(c)

$$(x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

(b)

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(d)

$$\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

(Funkce dodefinujte v počátku spojitě.)

6. Sestrojte funkci, která má v počátku derivaci ve všech směrech, avšak nemá totální diferenciál. Sestrojte ji navíc tak, aby derivace v počátku byla nulová ve všech směrech.

7. Ukažte, že u funkce 5(d) nelze v počátku zaměnit pořadí parciálních derivací.

8. Pomocí totálního diferenciálu vypočítejte přibližně

(a) $(1.02)^3(1.97)^2$

(c) $(0.97)^{1.05}$

(b) $\sqrt{(1.01)^4 + (2.02)^3}$

Porovnejte s výsledkem na kalkulačce.