4. série — Bilineární formy, vlastní čísla

1. K následujícím bilineárním formám napište odpovídající reprezentující matice:

$a : \mathrm{R}^2 \times \mathrm{R}^2 \to R$, **1.1.** $a(x, y) := 3x_1y_1 + 2x_2y_1 - x_1y_2 + 5x_2y_2$, **1.2.** $a(x, y) := x_1y_1$.

2. Převeďte následující matice na diagonální a určete, zda jsou PD, ND, PSD, NSD nebo ID:

2.1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, **2.2.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **2.3.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, **2.4.** $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$,

2.5. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & 8 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, **2.6.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 11 \end{pmatrix}$.

3. Rozhodněte, pro která $a \in \mathrm{R}$ jsou následující matice PD, ND, PSD, NSD nebo ID:

3.1. $\begin{pmatrix} 337 & 338 & 400 & 398 \\ 338 & 415 & 371 & 399 \\ 400 & 371 & 333 & 343 \\ 398 & 399 & 343 & a \end{pmatrix}$, **3.2.** $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & -1 & a & 13 \end{pmatrix}$.

4. Najděte vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory následujících matic:

4.1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, **4.2.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, **4.3.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, **4.4.** $\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathrm{R}$,

4.5. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, **4.6.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, **4.7.** $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

4.8. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Výsledky a návody

1.1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, **1.2.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
2.1. ID, **2.2.** ID, **2.3.** PSD, **2.4.** PD, **2.5.** ID, **2.6.** PSD.
3.1. vždy ID, **3.2.** PD pro $a \in (-\frac{7}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{10}, -\frac{7}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{10})$, ID pro $a \in (-\infty, -\frac{7}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{10}) \cup (-\frac{7}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{10}, +\infty)$, PSD pro $a = -\frac{7}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{10}$.
Náseledující výsledky jsou ve formátu (vlastní číslo, násobnost, vlastní vektory). 4.1. $(4, 1, \{[t, t] : t \in \mathrm{C} \setminus \{0\}\}), (-1, 1, \{[3t, -2t] : t \in \mathrm{C} \setminus \{0\}\})$, , **4.2.** $(1 + i, 1, \{[t, ti] : t \in \mathrm{C} \setminus \{0\}\}), (1 - i, 1, \{[t, -ti] : t \in \mathrm{C} \setminus \{0\}\})$, **4.3.** $(3, 2, \{[t, t] : t \in \mathrm{C} \setminus \{0\}\})$, **4.4.** pro $a \neq 0$: $(a, 1, \{[t, -t] : t \in \mathrm{C} \setminus \{0\}\}), (-a, 1, \{[t, t] : t \in \mathrm{C} \setminus \{0\}\})$, pro $a = 0$: $(0, 2, \{[t, s] : (t, s) \in \mathrm{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}\})$, **4.5.** $(0, 3, \{[t, t, 2t] : t \in \mathrm{C} \setminus \{0\}\})$, **4.6.** $(0, 3, \{t \cdot [1, 3, 0] + s \cdot [0, -1, 1] : [s, t] \in \mathrm{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}\})$, **4.7.** $(3, 2, \{[t, s, t] : [s, t] \in \mathrm{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}), (1, 1, \{[t, t, 2t] : t \in \mathrm{C} \setminus \{0\}\})$, **4.8.** $(2, 1, \{[t, t, t, 2t] : t \in \mathrm{C} \setminus \{0\}), (1, 3, \{[s, t, 0, s] : [s, t] \in \mathrm{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}\})$.

2.1

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-2&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\simeq\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-2&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

$$\simeq\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&-1\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

indefinitní

ID

2.2

$$\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\simeq\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$$\simeq\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\simeq\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

ID

2.3 Pozn: $ax = \frac{1}{a}$

$x \in j$

$aj + x$:

2.3 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

1a2. 1.2.

2-1: $\approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ -2

$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $+1$

-2

$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ PSD.

2.4 $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $-\frac{1}{2}$

$\approx \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 7/2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7/2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $-6/7$

$-\frac{1}{2}$

$\approx \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7/2 & 3 \\ 0 & 0 & 3/7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/7 \end{pmatrix}$

$3 - \frac{3 \cdot 6}{7} = 3\left(1 - \frac{6}{7}\right)$

$\frac{3}{7}$

$-6/7$

PD.

2.5. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & 8 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ prohoď 1. a 4. řádek a pak sloupec $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2×1. řádek ke 3. řádku & 2×1. sloupec ke 3. sloupci $\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1×1. řádek ke 4. řádku & totéž pro sloupce $\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$-\frac{3}{8}$× 2. řádek ke 3. řádku & totéž pro sloupce $\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & -3 & \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix}$

$\frac{3}{8}$× 2. řádek ke 4. řádku & totéž pro sloupce $\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$

1× 3. řádek ke 4. řádku & totéž pro sloupce $\sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 8 & & 0 \\ & & -\frac{1}{8} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ ID.

2.6 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 11 \end{pmatrix}$ $-\frac{4}{3}$, $-4/3$ $\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 4 & -\frac{1}{3} & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 11 \end{pmatrix}$ $-\frac{4}{3}$, $-4/3$ $\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -2 \\ 3 & 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$ -1, -1

$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ 2, 2 $\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ -3, -3 $\sim \begin{pmatrix} 3 & & & \\ & 2/3 & & \\ & & +\frac{1}{2} & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 2, 2

$\sim \begin{pmatrix} 3 & & & \\ & \frac{2}{3} & & \\ & & \frac{1}{2} & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ ... PSD

3.1 $A = \begin{pmatrix} 337 & 338 & 400 & 398 \\ 338 & 415 & 371 & 399 \\ 400 & 371 & 333 & 343 \\ 398 & 399 & 343 & a \end{pmatrix}$

$\Delta_1 = 337 > 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 337 & 338 \\ 338 & 415 \end{vmatrix} = 25611 > 0$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 337 & 338 & 400 \\ 338 & 415 & 371 \\ 400 & 371 & 333 \end{vmatrix} = -3938154$

$\Rightarrow$ ID vždy dle Sylvestra

3.2 $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & -1 & a & 13 \end{pmatrix} -1 \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & a \\ 2 & -3 & a & 13 \end{pmatrix} -\frac{1}{3} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 8/3 & a-\frac{2}{3} \\ 2 & -3 & a-\frac{2}{3} & 13 \end{pmatrix} -\frac{2}{3} \sim \begin{pmatrix} 3 & & & \\ & 1 & 1 & -3 \\ & 1 & \frac{8}{3} & a-\frac{2}{3} \\ & -3 & a-\frac{2}{3} & \frac{35}{3} \end{pmatrix} -1$

$\sim \begin{pmatrix} 3 & & & \\ & 1 & 0 & -3 \\ & 0 & 5/3 & a+7/3 \\ & -3 & a+7/3 & \frac{35}{3} \end{pmatrix} 3 \sim \begin{pmatrix} 3 & & & \\ & 1 & & \\ & & 5/3 & a+7/3 \\ & & a+7/3 & 8/3 \end{pmatrix} -\frac{3}{5}\left(a+\frac{7}{3}\right)$

$\sim \begin{pmatrix} 3 & & & \\ & 1 & & \\ & & 5/3 & \\ & & & \lambda(a) \end{pmatrix}; \quad \lambda(a) = -\frac{1}{5}\left(3a^2 + 14a + 3\right)$

$a_{1,2} = -\frac{7}{3} \pm \frac{2\sqrt{10}}{3}$

ID $\Leftrightarrow$ $\lambda(a) < 0$ $\Leftrightarrow$ $a < a_1$ nebo $a > a_2$

PSD $\Leftrightarrow$ $\lambda(a) \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $a \in [a_1, a_2]$

PD $\Leftrightarrow$ $\lambda(a) > 0$ $\Leftrightarrow$ $a \in (a_1, a_2)$

4.1 $\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1, & -3 \\ -2; & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$

$= (\lambda+1)(\lambda-4)$

$\lambda = -1: \begin{pmatrix} -2, & -3 \\ -2, & -3 \end{pmatrix} \quad v_1 = (-3, 2) \quad ; \lambda = 4: \begin{pmatrix} 3, & -3 \\ -2, & 2 \end{pmatrix} \quad v = (1,1)$

4.2 $\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1, & -1 \\ 1, & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 + 1 \; ; \; \lambda = 1 \pm i$

$\lambda_1 = 1+i: \begin{pmatrix} i, & -1 \\ 1, & i \end{pmatrix} \quad v_1 = (1, i) \qquad \lambda_2 = 1 - i = \overline{\lambda_1}$

$v_2 = \overline{v_1} = (1, -i).$

Pozn. A reálná, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ vl. číslo, v_0 vl. vektor

$\Rightarrow \overline{\lambda_0} \in \mathbb{C}$ je vl. číslo, $\overline{v_0}$ přísl. vl. vektor

4.3 $\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1, & -2 \\ 2, & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-5) + 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 9$

$= (\lambda - 3)^2$

$\lambda = 3: \begin{pmatrix} 2, & -2 \\ 2, & -2 \end{pmatrix} \quad v = (1,1) \ldots$ **Pozn alg. násobnost vs. geom. nás.**

4.4 $\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda, & -a \\ -a, & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a^2 \; ; \; \lambda = \pm a$

i) $a = 0: A = 0; \lambda = 0; v = (1,0), (0,1) \ldots$ alg. nás. = geom. nás.

ii) $a \neq 0: \lambda_1 = a; \begin{pmatrix} a, & -a \\ -a, & a \end{pmatrix} \quad v_1 = (1,1)$

$\lambda_2 = -a \begin{pmatrix} -a, & -a \\ -a, & -a \end{pmatrix} \quad v_2 = (-1, 1)$

Úvod: def – hodn. vl. vektor – LN sloupců – řešení O z.s.

hodnost – subdeterminant

4.5 $\chi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2, & 0, & 1 \\ -5, & \lambda+1, & 2 \\ -1, & -1, & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda+1, & 2 \\ -1, & \lambda+1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -5, & \lambda+1 \\ -1, & -1 \end{vmatrix}$

$= (\lambda-2)\Big(\underbrace{(\lambda+1)(\lambda+1)+2}_{\lambda^2+2\lambda+3}\Big) + (5 + \lambda+1) = \underline{\lambda^3}$

$\lambda = 0$ .. jediné vl. číslo; $\begin{pmatrix} 2, & 0, & -1 \\ 5, & -1, & -2 \\ 1, & 1, & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0, & -2, & 1 \\ 0, & -6, & 3 \\ 1, & 1, & -1 \end{pmatrix}$ $v = (1, +1, 2)$

4.6 $\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-3, & 1, & 1 \\ -6, & \lambda+2, & 2 \\ -3, & 1, & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda+2, & 2 \\ 1, & \lambda+1 \end{vmatrix} - (-6)\cdot\begin{vmatrix} 1, & 1 \\ 1, & \lambda+1 \end{vmatrix} + (-3)\cdot\begin{vmatrix} 1, & 1 \\ \lambda+2, & 2 \end{vmatrix} = \lambda^3$

$\begin{pmatrix} 3, & -1, & -1 \\ 6, & -2, & -2 \\ 3, & -1, & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $v_1 = (1, 3, 0)$
$v_2 = (0, 1, -1)$

4.7 $\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-5, & 0, & 2 \\ -2, & \lambda-3, & 2 \\ -4, & 0, & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2(\lambda-1)$

$\lambda_1 = 3$: $\begin{pmatrix} -2, & 0, & 2 \\ -2, & 0, & 2 \\ -4, & 0, & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2, & 0, & 2 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $v_1 = (0, 1, 0)$
$v_2 = (1, 0, 1)$

$\lambda_2 = 1$: $\begin{pmatrix} -4, & 0, & 2 \\ -2, & -2, & 2 \\ -4, & 0, & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4, & 0, & 2 \\ -2, & -2, & 2 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $v_3 = (1, 1, 2)$

4.8 $\lambda(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+2, & 0, & 2, & -3 \\ 2, & \lambda-1, & 1, & -2 \\ 2, & 0, & \lambda, & -2 \\ 5, & 0, & 3, & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda+2) \cdot \begin{vmatrix} \lambda-1, & 1, & -2 \\ 0, & \lambda, & -2 \\ 0, & 3, & \lambda-6 \end{vmatrix}$

$+2 \begin{vmatrix} 0, & & \\ 0, & & \\ 0, & & \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0, & 2, & -3 \\ \lambda-1, & 1, & -2 \\ 0, & 3, & \lambda-6 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 0, & 2, & -3 \\ \lambda-1, & 1, & -2 \\ 0, & \lambda, & -2 \end{vmatrix}$

$= (\lambda-2)(\lambda-1)^3$

$\lambda = 2: \begin{pmatrix} 4, & 0, & 2, & -3 \\ 2, & 1, & 1, & -2 \\ 2, & 0, & 2, & -2 \\ 5, & 0, & 3, & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0, & 0, & -2, & 1 \\ 0, & 1, & -1, & 0 \\ 2, & 0, & 2, & -2 \\ 5, & 0, & 3, & -4 \end{pmatrix}$

$v = (1, 1, 1, 2)$

$\lambda = 1: \begin{pmatrix} 3, & 0, & 2, & -3 \\ 2, & 0, & 1, & -2 \\ 2, & 0, & 1, & -2 \\ 5, & 0, & 3, & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3, & 0, & 2, & -3 \\ 2, & 0, & 1, & -2 \\ \cancel{5,} & \cancel{0,} & \cancel{3,} & \cancel{-5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3, & 0, & 2, & -3 \\ 2, & 0, & 1, & -2 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} -1, & 0, & 0, & 1 \\ 2, & 0, & 1, & -2 \end{pmatrix}$

$v_2 = (0, 1, 0, 0)$

$v_3 = (1, 0, 0, 1)$