A1

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \overset{*)}{=} \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{\frac{n}{2}} \right) dx \overset{**)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\int_0^1 (-1)^n x^{\frac{n}{2}} \, dx}_{= \frac{(-1)^n}{1+n/2}}$$

měřitelnost: $\sqrt{x} > 0$, spojité v $(0,1)$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$, $(-\sqrt{x})^n$ spojité a tedy měřitelné v $(0,1)$

ad *) $$\frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{1-(-x^{1/2})} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^{1/2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

geometrická řada
$(|-x^{1/2}| < 1, \ x \in (0,1))$

ad **) $$\left| \sum_{n=0}^{m} (-x^{1/2})^n \right| = \left| \frac{1-(-x^{1/2})^{m+1}}{1-(-x^{1/2})} \right| \le \frac{1+|\sqrt{x}|^{m+1}}{\underbrace{1+\sqrt{x}}_{\ge 1}} \le \frac{2}{1}$$

Lebesgueova věta:

majoranta

$g(x) \equiv 2 \in \mathcal{L}^1(0,1)$

A2

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \underbrace{\frac{dx}{(1+x)\sqrt[n]{x}}}_{f_n(x)} \overset{*)}{=} \int_1^\infty \frac{dx}{1+x} \overset{*)}{=} \underbrace{\Big[\ln(1+x)\Big]_1^\infty}_{=\,+\infty}$$

ad *) Leviho věta:

$$x>1 \Rightarrow \sqrt[n]{x} = \exp\left(\tfrac{1}{n}\ln x\right) \searrow \exp(0) = 1$$

$$\Rightarrow 0 < f_n(x) \nearrow f(x) := \frac{1}{1+x}$$

měřitelnost: jmenovatel kladný, spojitý

$\Rightarrow$ $f_n(x)$, $f(x)$ spojité, a tedy měřitelné na $(1,\infty)$

A3

$$F(a) = \int_1^\infty \underbrace{\frac{\exp(a/x)}{1+\exp x}}_{=\,f(x,a)}\, dx$$

$f(x,a)$ ...... spojitá ($\Rightarrow$ měřitelná) vůči x, $\forall a>0$ pevné

též spojitá vůči $a\in\mathbb{R}$, $\forall x$ pevné

i) konečnost: čitatel: $\frac{a}{t} < a$ (neb $x>1$)

jmenovatel: $1+e^t > e^t$ (>0)

$$\Rightarrow \quad 0 < f(t,a) < \frac{e^a}{e^t} = \underline{e^{a-x} \in \mathcal{L}^1(1,\infty)}$$

ii) spojitost: uvažme jen $\boxed{a \in I_\Delta = (0,\Delta)}$

($\Delta > 0$ libovolné, pevné)

podobně jako výše: $|f(t,a)| \leq e^{\Delta - t}$ $^{*)}$ $=: g(t)$

(pro $\forall a \in I_\Delta, \forall x > 1$)

Věta 4.2: $\Rightarrow$ $F(a)$ spojité v $(0,\Delta)$

*) majoranta!!

leč: $\Delta > 0$ libovolné

$\Rightarrow$ $F(a)$ spojité v $(0,\infty)$

B1 $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{\exp x}{1-\exp x}\,dx \overset{*)}{=} \int_{-\infty}^{0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{(n+1)x} \right) dx \overset{**)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} e^{(n+1)x}\,dx$

ad $*$) $\displaystyle\frac{1}{1-e^x} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^x)^n$ ... geometrické řada, $q = e^x \in (0,1)$ neb $x<0$

ad $**$) Leviho věta (pro řady) ... $f_n(x) = e^{(n+1)x} \geq 0$

měřitelné $\Leftarrow$ spojité v $(-\infty,0)$

B2 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \underbrace{\left(\frac{n+x}{n+1}\right)\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}}_{f_n(x)} \overset{*)}{=} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_0^1 x^{-2/3}\,dx = 3$

$*$) Lebesgueova věta: $f_n(x)$ ... spojité, a tedy měřitelné v $(0,1)$ pro $\forall n$ pevné

$f_n(x) \to \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ (neboť $\dfrac{n+x}{n+1} = \dfrac{1+\frac{x}{n}}{1+\frac{1}{n}} \to 1$ dle VoAL $\forall x$ pevné)

$|f_n(x)| = \underbrace{\dfrac{n+x}{n+1}}_{\leq 1} \cdot x^{-2/3} \leq x^{-2/3} =: g(x) \in \mathcal{L}^1(0,1)$

B3 $F(a) = \int_1^\infty \underbrace{\frac{\operatorname{arctg}(ax)}{1+x^a}}_{= f(a,x)}\,dx$

*) podíl spojitých fcí, jmenovatel $> 1 \neq 0$.

$f(a,x)$ .... *) spojité vůči a (x pevné)

spojité (a dokonce měřitelné) vůči x (a pevné)

i) konečnost: $0 < f(a,x) \le \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+x^a} \le \frac{\pi}{2}x^{-a}$

(neboť $0 < \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2}, \forall y > 0$)

avšak $\int_1^\infty x^{-a}\,dx < \infty$ pro $a > 1$

ii) spojitost: uvažujme $a \in I_\delta = (1+\delta, +\infty)$

($\delta > 0$ pevné, libovolné)

$$\sup_{a \in I_\delta} |f(a,x)| \le \frac{\pi}{2} \cdot \sup_{a > 1+\delta} \frac{1}{x^a} = \underbrace{\frac{\pi}{2} x^{-1-\delta}}_{=: g(x)}$$

pro $\forall x \in (1,\infty)$

zřejmě $g(x) \in \mathcal{L}^1(1,\infty)$

(viz výše)

$\Longrightarrow$ Věta 4.2. $F(a)$ spojitá v I_δ

leč: $\delta > 0$ libovolné, a tedy

$F(a)$ spojitá v $\bigcup_{\delta>0} I_\delta = (1, +\infty)$