D.D.Ú.1 — k 7.3. resp. 8.3.2017

1.1. Nalezněte funkci, jejíž Fourierova řada má tvar

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kx \quad \text{resp.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} q^k \sin kx \tag{1}$$

kde $q \in (-1, 1)$.

1.2. Nalezněte Fourierovy koeficienty funkce $f(x)$, která je definována jako $f(x) = x \cos x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, a dále π-periodicky rozšířená do $\mathbb{R}$.

1.3. Vypočtěte pro $k \geq 0$ celé integrál

$$I_k = \int_0^{\pi} \frac{\sin kx}{\sin x}\, dx$$

....

1.1. Označme $f_k(x) = q^k \cos kx$, $g_k(x) = q^k \sin kx$. Zřejmě máme $|f_k(x)|$, $|g_k(x)| \leq |q|^k$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé k. Řada (číselná) $\sum_k |q|^k$ dle předpokladů konverguje. Tedy podle Weierstrassovy věty obě řady (funkcí) v (1) konvergují stejnoměrně (dokonce absolutně stejnoměrně v $\mathbb{R}$).
Označme jejich součty jako $f(x)$ resp. $g(x)$. Stejnoměrná konvergence zaručuje, že (1) jsou zároveň Fourierovými řadami svých součtů. Neboli pro Fourierovy koeficienty funkce $f(x)$ platí $a_0 = 0$, $a_k = q^k$ pro $k \geq 1$ a $b_k = 0$; pro Fourierovy koeficienty $g(x)$ máme $a_k = 0$ pro $k \geq 0$ a $b_k = q^k$ pro $k \geq 1$.
Zbývá nalézt součty těchto řad. Všimneme si, že z Eulerova vzorce plyne

$$f_k(x) + i g_k(x) = Q^k(x), \qquad Q(x) = q \exp(ix)$$

a tedy $f(x)$ resp. $g(x)$ je reálná resp. imaginární část součtu

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q^k(x) = \frac{Q(x)}{1 - Q(x)}$$

Lehce se pak dopočte

$$f(x) = \frac{q(\cos x - q)}{1 - 2q\cos x + q^2} \qquad g(x) = \frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2}$$

1.2. Funkce je lichá, tedy $a_k = 0$. Zbývá vypočíst

$$b_k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \cos x \sin 2kx\, dx$$

Užijeme vzoreček $\cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$. Odtud per partes

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} b_k &= \int_0^{\pi/2} x\big(\sin{(2k+1)x} + \sin{(2k-1)x}\big)\, dx \\ &= \Big[x\big(-\frac{\cos{(2k+1)x}}{2k+1} - \frac{\cos{(2k-1)x}}{2k-1}\big)\Big]_{x=0}^{x=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos{(2k+1)x}}{2k+1} + \frac{\cos{(2k-1)x}}{2k-1}\, dx \end{aligned}$$

Přírůstkový člen je roven nule (díky $x = 0$ resp. cos v lichém násobku $\pi/2$). Poslední integrál se lehce spočte jako

$$\Big[\frac{\sin{(2k+1)x}}{(2k+1)^2} + \frac{\sin{(2k-1)x}}{(2k-1)^2}\Big]_{x=0}^{x=\pi/2} = (-1)^k \frac{-8k}{(4k^2-1)^2}$$

neboť $\sin{(k\pi \pm \pi/2)} = \pm(-1)^k$. Celkem tedy

$$b_k = (-1)^{k+1} \frac{16k}{\pi(4k^2-1)^2}$$

1.3. Zřejmě $I_0 = 0$ a $I_1 = \pi$. Pomocí vzorečků

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \tag{2}$$
$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \tag{3}$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \tag{4}$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \tag{5}$$

dostáváme postupně

$$\begin{aligned}
I_{k+2} &= \int_0^\pi \frac{\sin(kx+2x)}{\sin x}\,dx \\
&= \int_0^\pi \frac{\sin kx \cos 2x + \cos kx \sin 2x}{\sin x}\,dx \\
&= \int_0^\pi \frac{\sin kx(1-2\sin^2 x) + 2\cos kx \sin x \cos x}{\sin x}\,dx \\
&= I_k + 2\int_0^\pi \cos kx \cos x - \sin kx \sin x\,dx \\
&= I_k + 2\int_0^\pi \cos(k+1)x\,dx
\end{aligned}$$

Poslední integrál je ovšem nula. Tedy $I_{k+2} = I_k$, neboli $I_k = 0$ pro $k \geq 0$ sudé a $I_k = \pi$ pro $k \geq 1$ liché.