Vyučující: doc. Dalibor Pražák
Příklady pro: opravnou písemku
Počet bodů: 15

Zadání: Přiřaďte funkci

$$f(x) = x^3$$

její trigonometrickou řadu odpovídající intervalu $(-\pi, \pi)$.

Podejte co nejúplnější informace o bodové a stejnoměrné konvergenci získané řady.

Napište Parsevalovu rovnost pro zadanou funkci na $(-\pi, \pi)$ a výslednou rovnost zjednodušte.

Řešení: Máme

$$a_k = 0 \qquad \text{pro všechna } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

a (tohle mne letos naučili studenti)

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^3 \sin(kx) = \left| \begin{array}{cc} x^3 & \sin kx \\ 3x^2 & \oplus \frac{-\cos kx}{k} \\ 6x & \ominus \frac{-\sin kx}{k^2} \\ 6 & \oplus \frac{\cos kx}{k^3} \\ 0 & \ominus \frac{\sin kx}{k^4} \end{array} \right| = -\frac{2}{\pi}\Big[x^3 \frac{\cos kx}{k}\Big]_0^\pi + \frac{2}{\pi}\Big[6x \frac{\cos kx}{k^3}\Big]_0^\pi$$

$$= -\frac{2(-1)^k \pi^2}{k} + \frac{12(-1)^k}{k^3}.$$

Dostáváme

$$F_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(-\frac{2(-1)^k \pi^2}{k} + \frac{12(-1)^k}{k^3}\Big) \sin(kx).$$

Podle Dirichlet-Jordana $F_f = f$ na $(-\pi, \pi)$ a $F_f(-\pi) = F_f(\pi) = 0$. Dále máme lokálně stejnoměrnou konvergenci na $(-\pi, \pi)$. Parseval dává

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^6 = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^7}{7} = \frac{2\pi^6}{7} = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(-\frac{2(-1)^k \pi^2}{k} + \frac{12(-1)^k}{k^3}\Big)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{2\pi^2}{k} - \frac{12}{k^3}\Big)^2.$$

Bodování:
5 bodů za výpočet koeficientů (lichost a sudost nemusí viditelně ověřovat ani zmiňovat)
6 bodů za bodovou konvergenci (nemusí viditelně ověřovat spojitost a počítat limity, u konečnosti variace či integrovatelnosti v Dinim chceme podrobnosti, jinak strhnout 4 body, zde nic neuznávat ve stylu "ale myslel to asi dobře")

Příklad 1. Pro funkci $f(z) = \dots$ najděte všechny singularity, určete jejich typ, a rozepište vzoreček pro výpočet rezidua.

Příklad 2. Vypočítejte integrál $I = \dots$ Vypočítejte (vhodnou integrací v $\mathbb{C}$ a užitím reziduové věty) integrál $I = \dots$ Podrobněji: popište křivku v $\mathbb{C}$ včetně parametrizace jednotlivých částí, definujte integrovanou funkci a určete všechny její singularity. Napište vzorečky pro výpočet reziduí.

ÚLEVA: hodnoty reziduí není třeba explicitně dopočítávat, stačí uvést (konkrétně rozvedený) vzoreček, který použijete.

....**Bodování.**

Příklad 1 – celkem 6 bodů, z toho:
3 body za singularity (není-li jasné, že jsou všechny, či není-li zřetelně odůvodněn typ, tak -1 či -2 body).
3 body za vzorečky pro rezidua (řekněme 2 za těžší, 1 za lehčí případ)

Příklad 2 – celkem 9 bodů, z toho:
3 body za správné určení funkce a křivky
3 body za limitní přechody
3 body za rezidua a jejich (správně začaté) výpočty

Příklad 1. Pro funkci

$$f(z) = \frac{\sin z}{z(z^3+1)^2}$$

najděte všechny singularity, určete jejich typ, a rozepište vzoreček pro výpočet rezidua.

Řešení. Možné singularity jsou nulové body jmenovatele, tj. předně $z = 0$. Avšak $f(z)$ je omezená na $P(0, \delta)$, neboť $\sin z/z \to 0$. Tedy $z = 0$ je odstranitelná singularita a $\operatorname{Res}_0 f(z) = 0$.
Dále hledáme řešení rovnice $z^3 = -1$, což jsou $z_k = \exp\big(\frac{i\pi}{3}(1+2k)\big)$, $k = 0, 1, 2$. Protože čitatel je zde nenulový, jedná se o dvojnásobné póly. Užijeme-li rozklad

$$f(z)\frac{\sin z}{z(z-z_0)^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2}$$

je dle známého vzorečku

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \left(\frac{\sin z}{z(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right)'_{z=z_0}$$

a podobně pro $z = z_1$, $z = z_2$.

Příklad 2. Integrací v $\mathbb{C}$ spočítejte

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/3}}{e+e^{2x}}\,dx$$

Řešení. Integrujeme $f(z) = \frac{e^{z/3}}{e+e^{2z}}$ podél obdélníku s vrcholy $\pm R$ a $\pm R + 2\pi i$, tj. podél křivky $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \ominus \varphi_3 \ominus \varphi_4$, kde

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= t, \quad t \in [-R, R] \\
\varphi_2(t) &= R + 2\pi i t, \quad t \in [0, 1] \\
\varphi_3(t) &= t + 2\pi i, \quad t \in [-R, R] \\
\varphi_4(t) &= -R + 2\pi i t, \quad t \in [0, 1]
\end{aligned}$$

Singularity jsou pro $e^{2z} = -e = e^{1+i\pi}$, tj. $z_k = \frac{1}{2} + i\pi(\frac{1}{2} + k)$, $k \in \mathbb{Z}$; uvnitř φ se nacházejí pouze z_1 a z_2. Z reziduové věty

$$\int_\varphi f(z)\,dz = 2\pi i\big(\operatorname{Res}_{z_0} f(z) + \operatorname{Res}_{z_1} f(z)\big)$$

Pravá strana: zjevně z_k jsou jednoduché póly, tedy

$$\operatorname{Res}_{z_k} f(z) = \left.\frac{e^{z/3}}{(e+e^{2z})'}\right|_{z=z_k} = \frac{1}{2}\exp\big(-\frac{5}{3}z_k\big)$$

Levá strana, pošleme-li $R \to +\infty$, dává

$$\left(\int_{\varphi_1} - \int_{\varphi_3}\right) \to I - (e^{2i\pi/3})I = I(1 - e^{2i\pi/3})$$

zatímco integrály přes φ_2, φ_4 jdou do nuly. Celkem tedy

$$I(1 - e^{2\pi i/3}) = \frac{2\pi i}{2}\left(e^{-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{i\pi}{2}\right)} + e^{-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{3i\pi}{2}\right)}\right)$$

a po (již nepovinné) úpravě $I = \pi e^{-5/6}$.