Příklad 1. Pro funkci

$$f(z) = \frac{1}{z^2(e^{2z} + e^z + 1)}$$

najděte všechny singularity, určete jejich typ, a rozepište vzoreček pro výpočet rezidua.

Řešení. Zjevně $z = 0$ je dvojnásobný pól a tedy

$$\mathrm{Res}_0\, f(z) = \left(\frac{1}{e^{2z} + e^z + 1}\right)'_{z=0} = -\frac{2e^{2z} + e^z}{(e^{2z} + e^z + 1)^2} = -\frac{1}{3}$$

Další singularity odpovídají $w^2 + w + 1 = 0$, tj. $w_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, kde $w = e^z$. Ovšem $w_{1,2} = \exp(\pm\frac{2}{3}\pi i)$, tedy dostáváme singularity $z_{1,k} = \frac{2}{3}\pi i + 2k\pi i$ a $z_{2,k} = -\frac{2}{3}\pi i + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Jde o jednoduché póly, a tedy

$$\mathrm{Res}_{z_{1,k}} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{(e^{2z} + e^z + 1)'}\bigg|_{z=z_{1,k}} = \frac{1}{z_{1,k}^2} \frac{1}{2e^{2z_k} + e^{z_k}}$$

a totéž pro $z = z_{2,k}$.

Příklad 2. Vypočítejte (vhodnou integrací v $\mathbb{C}$ a užitím reziduové věty) integrál

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{x(x^4 + 1)}$$

Podrobněji: popište křivku v $\mathbb{C}$ včetně parametrizace jednotlivých částí, integrovanou funkci a její singularity. Odůvodněte podrobně limitní přechody a vyjádřete I pomocí příslušných residuí.

Řešení. Volíme $g(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^4+1)}$, kde budu nucen se vyhnout reálné singularitě $z = 0$; komplexní singularity jsou $\pm 1/\sqrt{2} \pm i/\sqrt{2}$ a budu uvažovat imaginární část výsledku reziduové věty.
Tedy má křivka je $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3 \ominus \varphi_4$, kde

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= t, \quad t \in [\varepsilon, R] \\
\varphi_2(t) &= Re^{it}, \quad t \in [0, \pi] \\
\varphi_3(t) &= t, \quad t \in [-R, -\varepsilon] \\
\varphi_4(t) &= \varepsilon e^{it}, \quad t \in [0, \pi]
\end{aligned}$$

kde $\varepsilon > 0$ je malé a $R > 0$ je velké. Tedy φ má uvnitř singularity $z_{1,2} = \pm 1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$ a reziduová věta dává

$$\int_\varphi g(z)\, dz = 2\pi i\big(\mathrm{Res}_{z_1} g(z) + \mathrm{Res}_{z_2} g(z)\big)$$

Napravo jde určitě o jednoduché póly, tedy $\mathrm{Res}_{z_k} g(z) = \frac{e^{iz}}{z} \frac{1}{(z^4+1)'}\Big|_{z=z_k} = -\frac{1}{4}e^{iz_k}$. Nalevo je

$$\int_\varphi g(z) = \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} + \int_{\varphi_3} - \int_{\varphi_4} = I_1 + I_2 + I_3 - I_4.$$

A zde pak

$$\mathrm{Im}(I_1 + I_3) = \int\limits_{(-R,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,R)} \frac{\sin t\, dt}{t(t^4 + 1)} \to I, \qquad \varepsilon \to 0+, R \to \infty$$

Podle Jordanovy věty potom $I_2 \to 0$, $R \to \infty$ a konečně podle Tvrzení 20.9.7 máme

$$I_4 \to \pi i\, \mathrm{Res}_0\, g(z) = \pi i \left.\frac{e^{iz}}{z^4 + 1}\right|_{z=0} = \pi i \qquad \varepsilon \to 0+$$

Celkem je tedy přechodem k imaginární části

$$I = \pi + \Im\big(2\pi i(-\frac{1}{4}e^{iz_1} - \frac{1}{4}e^{iz_2})\big) = \pi\big(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \cos\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$$

Příklad 1. Pro funkci

$$f(z) = \frac{z - 3/2}{e^{2z} - e^3}$$

najděte všechny singularity, určete jejich typ, a rozepište vzoreček pro výpočet rezidua.

Řešení. Funkce $e^{2z} - e^3$ je nulová (a má jednoduchý kořen) za podmínky $2z = 3 + 2k\pi i$, tj. právě v bodech $z_k = 3/2 + k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Jde o jednoduché póly s výjimkou bodu $z_0 = 3/2$, kde je odstranitelná singularita (a tedy $\operatorname{Res}_{3/2} f(z) = 0$) díky nulovosti čitatele.
V ostatních bodech dle známého vzorečku jest

$$\operatorname{Res}_{z_k} f(z) = \left.\frac{z - 3/2}{(e^{2z} - e^3)'}\right|_{z=z_k} = \frac{z_k - 3/2}{2e^{2z_k}}$$

Příklad 2. Integrací v $\mathbb{C}$ spočítejte

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \cos 2x \, dx}{2(x^2 + a^2)^2} \qquad a > 0$$

Řešení. Budeme integrovat funkci $f(z) = \frac{1+e^{2iz}}{2(z^2+a^2)^2}$ a budeme brát zřetel pouze na reálnou část. Křivka je obvod horní půlkružnice, tj. $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$, kde

$$\varphi_1(t) = t, \quad t \in [-R, R]$$
$$\varphi_2(t) = Re^{it}, \quad t \in [0, \pi]$$

Podle reziduové věty je $\int_\varphi f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{ia} f(z)$. Protože můžeme psát

$$f(z) = \frac{1 + e^{2iz}}{2(z + ia)^2} \cdot \frac{1}{(z - ia)^2}$$

je

$$\operatorname{Res}_{ia} f(z) = \left(\frac{1 + e^{2iz}}{2(z + ia)^2}\right)'_{z=ia} = -\frac{i}{8a^3}\big(1 + e^{-2a}(2a + 1)\big)$$

Na druhé straně dle Jordanova lemmatu $\int_{\varphi_2} f(z)\, dz \to 0$, zatímco $\operatorname{Re} \int_{\varphi_1} f(z)\, dz \to I$. Dostaneme pak celkem

$$I = \frac{\pi}{4a^3}\big(1 + e^{-2a}(2a + 1)\big)$$