Zadání: Přiřaďte funkci

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

její trigonometrickou řadu odpovídající intervalu $(-\pi, \pi)$.

Podejte co nejúplnější informace o bodové a stejnoměrné konvergenci získané řady.

Napište Parsevalovu rovnost pro zadanou funkci na $(-\pi, \pi)$ a v případě, že uvedená rovnost umožňuje sečíst sympaticky vypadající číselnou řadu, učiňte tak.

Řešení: Máme

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^x = \frac{1}{\pi}\Big(\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}\Big) = \frac{2}{\pi}\sinh\pi,$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^x\cos(kx) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}kx} = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\Big(\frac{(-1)^k\mathrm{e}^{\pi}}{1+\mathrm{i}k} - \frac{(-1)^k\mathrm{e}^{-\pi}}{1+\mathrm{i}k}\Big) \\ &= \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\Big(\frac{(-1)^k\mathrm{e}^{\pi}(1-\mathrm{i}k)}{1+k^2} - \frac{(-1)^k\mathrm{e}^{-\pi}(1-\mathrm{i}k)}{1+k^2}\Big) = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{(-1)^k\mathrm{e}^{\pi}}{1+k^2} - \frac{(-1)^k\mathrm{e}^{-\pi}}{1+k^2}\Big) \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{1+k^2}\sinh\pi \end{aligned}$$

a analogicky

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^x\sin(kx) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\Big(\frac{(-1)^k\mathrm{e}^{\pi}(1-\mathrm{i}k)}{1+k^2} - \frac{(-1)^k\mathrm{e}^{-\pi}(1-\mathrm{i}k)}{1+k^2}\Big) \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{-(-1)^k k}{1+k^2}\sinh\pi. \end{aligned}$$

Dostáváme

$$F_f(x) = \frac{1}{\pi}\sinh\pi + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{1+k^2}\sinh\pi\cos(kx) + \frac{2}{\pi}\frac{-(-1)^k k}{1+k^2}\sinh\pi\sin(kx).$$

Podle Dirichlet-Jordana $F_f = \mathrm{e}^x$ na $(-\pi, \pi)$ a $F_f(-\pi) = F_f(\pi) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\pi} + \mathrm{e}^{-\pi}) = \cosh\pi$. Dále máme lokálně stejnoměrnou konvergenci na $(-\pi, \pi)$. Parseval dává

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x} = \frac{1}{\pi}(\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi}) = \frac{2}{\pi}\sinh(2\pi) &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \\ &= \sinh^2\pi\Big(\frac{2}{\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{(1+k^2)^2} + \frac{4}{\pi^2}\frac{k^2}{(1+k^2)^2}\Big) \\ &= \sinh^2\pi\Big(\frac{2}{\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{1+k^2}\Big). \end{aligned}$$

Odtud

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k^2} = \frac{\pi^2}{4}\Big(\frac{2}{\pi}\frac{\sinh(2\pi)}{\sinh^2\pi} - \frac{2}{\pi^2}\Big) = \pi\frac{\cosh\pi}{\sinh\pi} - \frac{1}{2}.$$

Zadání: Přiřaďte funkci
$$f(x) = \max\{0, x\}$$
její trigonometrickou řadu odpovídající intervalu $(-\pi, \pi)$.

Podejte co nejúplnější informace o bodové a stejnoměrné konvergenci získané řady.

Napište Parsevalovu rovnost pro zadanou funkci na $(-\pi, \pi)$ a v případě, že uvedená rovnost umožňuje sečíst sympaticky vypadající číselnou řadu, učiňte tak.

Řešení: Máme
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2},$$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos(kx) = \frac{1}{\pi}\Big[x\frac{\sin kx}{k}\Big]_0^\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin kx}{k} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin kx}{k}$$
$$= -\frac{1}{\pi k^2}[-\cos kx]_0^\pi = \frac{1}{\pi k^2}((-1)^k - 1)$$
a
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin(kx) = -\frac{1}{\pi}\Big[x\frac{\cos kx}{k}\Big]_0^\pi + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos kx}{k} = -\frac{1}{\pi}\frac{\pi(-1)^k}{k} = -\frac{(-1)^k}{k}.$$

Dostáváme
$$F_f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\pi k^2}((-1)^k - 1)\cos k(x) - \frac{(-1)^k}{k}\sin kx.$$
Podle Dirichlet-Jordana $F_f = f$ na $(-\pi, \pi)$ a $F_f(-\pi) = F_f(\pi) = \frac{\pi}{2}$. Dále máme lokálně stejnoměrnou konvergenci na $(-\pi, \pi)$. Parseval dává
$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2 = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3} = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^\infty a_k^2 + b_k^2$$
$$= \frac{\pi^2}{8} + \sum_{k=1}^\infty \Big(\frac{1}{\pi^2}\frac{((-1)^k - 1)^2}{k^4} + \frac{1}{k^2}\Big).$$
Odtud
$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^2}{4}\Big(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{6}\Big) = \frac{\pi^2}{4}\frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^4}{96}.$$
Proto ($\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k)^4} = \frac{1}{16}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^4}$)
$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^4} = \frac{16}{15}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{16}{15}\frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}.$$