Izoperimetrická nerovnost v rovině [1]

1. Formulace úlohy. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je „rozumná“ omezená oblast, nechť A je její obsah, L je délka hranice. Izoperimetrická nerovnost říká, že “A je nejvýše rovno obsahu kruhu, jenž má obvod L, a rovnost nastává, právě když A je takovýto kruh”.
Totéž lze formulovat jako variační úlohu: že všech „rozumných“ množin o předepsaném obvodu L má největší obsah kruh, přičemž cokoliv, co není kruh, má obsah striktně menší. Analytický tvar izoperimetrické nerovnosti je

$$A \leq \pi \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi} \tag{1}$$

2. Volba parametrizace. Ω „rozumná“ značí, že její hranice $\gamma = \partial\Omega$ je jednoduchá uzavřená (případně zobecněná uzavřená) křivka. Ukážeme, že existuje parametrizace $\varphi(t)$ taková, že (i) $t \in [0, 2\pi]$ a (ii) $\|\varphi'(t)\| = \text{konst}$.
Předpokládejme, že $\psi(\tau) : [a, b] \to \gamma$ je libovolná parametrizace. Definuj

$$\chi(\tau) = \frac{2\pi}{L} \int_a^\tau \|\psi'(s)\| \, ds \qquad \tau \in [a, b]$$

Zřejmě $\chi(a) = 0$, $\chi(b) = 2\pi$ a (derivace integrálu podle horní meze + vlastnosti parametrizace ψ) $\chi'(\tau) = \|\psi'(\tau)\|$ pro $\tau \in (a, b)$. Tedy $\chi(\tau)$ zobrazuje $[a, b]$ vzájemně jednoznačně na $[0, 2\pi]$. Podle věty o derivování inverzní funkce (viz 1. semestr) je $(\chi_{-1})'(t) = 1/\chi'(\chi_{-1}(t))$. Definujme $\varphi(t) := \psi(\chi_{-1}(t))$. Zřejmě $\varphi(t) : [0, 2\pi] \to \gamma$ je vzájemně jednoznačné a z předchozích vztahů

$$\varphi'(t) = \psi'(\chi_{-1}(t))(\chi_{-1})'(t) = \frac{\psi'(\chi_{-1}(t))}{\|\psi'(\chi_{-1}(t))\|} \cdot \frac{L}{2\pi} \tag{2}$$

tedy $\varphi(t)$ je hledaná parametrizace, přičemž konstanta v bodě (ii) je rovna $L/2\pi$.

3. Greenova věta. Platí $A = -\int_\gamma y \, dx$. Na pravé straně je integrál 2. druhu pole $F = (-y, 0)$, jehož rotace je 1, což integrováno přes Ω dle Greenovy věty dá A.

4. Variační formulace. Nechť $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, kde $t \in [0, 2\pi]$, je parametrizace $\gamma = \partial\Omega$, sestrojená v bodě 2. Jest $(x')^2 + (y')^2 = \|\varphi'(t)\|^2 = L^2/4\pi^2$. Tedy s užitím bodu 3 máme

$$\frac{L^2}{2\pi} - 2A = \int_0^{2\pi} (x')^2 + (y')^2 - 2yx' \, dt = \underbrace{\int_0^{2\pi} (x' + y)^2 + (y')^2 - y^2 \, dt}_{\Phi(x,y)} \tag{3}$$

Potřebujeme dokázat, že $\Phi(x, y) \geq 0$ a pokud je 0, tak nutně $(x(t), y(t))$ parametrizují kružnici.

[1]Podle článku R. Ossermana ”The Isoperimetric Inequality”, Bulletin of the American Mathematical Society, 84 (1978), s. 1183-5.

5. Fourierova řada. Nechť funkce $y(t)$ má Fourierův rozvoj

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt \tag{4}$$

BÚNO předpokládejme navíc, že $\int_0^{2\pi} y(t)\,dt = 0$, tj. $a_0 = 0$. Toho lze dosáhnout přičtením vhodné konstanty, což nemění ani původní úlohu – jde o posun ve směru y – ani variační nerovnost (3) – viz prostřední člen.
Funkce $y'(t)$ má Fourierův rozvoj

$$y'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} -ka_k \sin kt + kb_k \cos kt \tag{5}$$

Z Parsevalovy rovnosti vyplývá, že

$$\int_0^{2\pi} (y')^2 - y^2\,dt = \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^2a_k^2 + k^2b_k^2 - a_k^2 - b_k^2\right) = \pi \sum_{k=2}^{\infty} (k^2-1)(a_k^2+b_k^2) \tag{6}$$

To je zřejmě nezáporné, a tedy $\Phi(x,y) \geq 0$. Je-li $\Phi(x,y) = 0$, pak je výraz (6) nulový, tj. $a_k = b_k = 0$ pro každé $k \geq 2$, neboli

$$y(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t$$

Můžeme jistě psát $(a_1, b_1) = (r\cos t_0, -r\sin t_0)$ pro vhodné $r \geq 0$ a t_0 reálné, tj. $y(t) = r\cos(t+t_0)$. Protože z nulovosti $\Phi(x,y)$ vyplývá konečně i nulovost $(x'+y)^2$, je $x'(t) = -r\cos(t+t_0)$, tedy $x(t) = x_0 - r\sin(t+t_0)$. Jde tedy o kružnici a důkaz je završen.

Poznámka. Nerovnost $\int_0^{2\pi} y^2 \leq \int_0^{2\pi} (y')^2$, pro $y = y(t)$ splňující $\int_0^{2\pi} y = 0$, dokázaná v (6), se nazývá *Wirtingerova* (též *Poincarého*) nerovnost.