ODR 2 / ZS 2020

22.12. (předtermín)

1. příklad [6b]

Maximalizujte $P[u(\cdot)] = \int_0^2 x(t) - u^2(t)dt$, kde $x' = u$, $x(0) = 0$ a $u : [0,T] \to \mathbb{R}$.

2. příklad [7b] Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F(X) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \begin{pmatrix} -x^3 \\ -y^3 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že systém

$$X' = \epsilon AX + F(X)$$

(a) nemá periodické řešení pro $\epsilon \leq 0$;
(b) má netriviální periodické řešení pro každé $\epsilon > 0$.

Návod: Bendixson a spol.

3. příklad [7b] Ukažte ověřením předpokladů příslušné věty, že soustava

$$\begin{aligned} x' &= \alpha z^3 \\ y' &= -y + x^2 \\ z' &= -2z - x^2 \end{aligned}$$

má v okolí počátku centrální varietu tvaru $(y,z) = (\phi_1(x), \phi_2(x))$. Rozhodněte v závislosti na parametru α, zda je počátek stabilní a zda je asymptoticky stabilní. (Aproximujte c.v. vhodnou funkcí.)

① .... V. 18.11. [P.M. / Bolza]

$$\left.\begin{array}{l} r = x - u^2, \quad g = 0 \\ f = u \end{array}\right\} \Rightarrow H = \lambda u + x - u^2$$

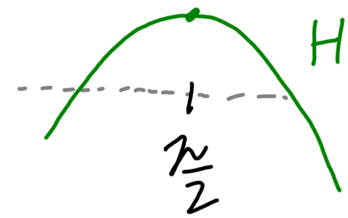
$u = u(t) \in \mathbb{R}$

$t \in [0,2]$

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda - 2u}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2 < 0$$

glob. max

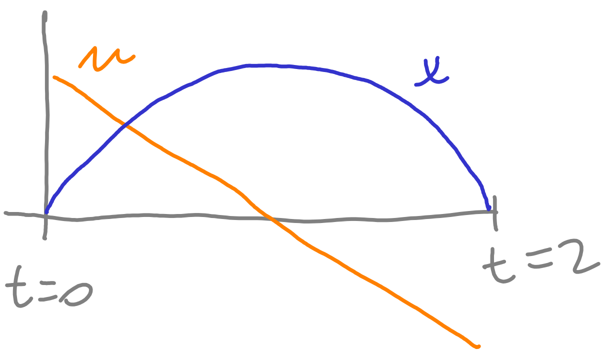


nutná podm.: $u(t) = \frac{1}{2}\lambda(t)$

adj. rce:
$$\left.\begin{array}{l} \lambda' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -1 \\ \lambda(2) = g'(x(2)) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lambda(t) = 2 - t}$$

$$u(t) = 1 - \frac{t}{2}$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t u(s)\,ds = t - \frac{1}{4}t^2$$



? existence maxima ?

② (i) $\varepsilon \le 0$ ..... Ljap. fce $V = x^2 + y^2$

$$\dot V = 2xx' + 2yy' = 2\varepsilon(x^2+y^2) - \frac{2(x^4+y^4)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

$\Rightarrow \dot V < 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$

V. 14.1. (LaSalle) nebo V. 10.2 (Ljap. č. 2) $\Longrightarrow (x(t), y(t)) \to (0,0) \quad t \to +\infty$

speciálně: $\nexists$ per. orbit.

jinak: V. 15.2. (Bendixson–Dulac)

pro $X' = F(X)$ $\Rightarrow$

$$\operatorname{div} F(X) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon(x+y) - \frac{x^3}{\sqrt{1+\cdots}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon(-x+y) - \frac{y^3}{\sqrt{1+\cdots}}\right)$$

$$\cdots = \underbrace{2\varepsilon}_{\leq 0} - \frac{1}{\left(\sqrt{1+\cdots}\right)^3}\left(3\underbrace{(x^2+y^2)(1+x^2+y^2)}_{> (x^2+y^2)^2 \geq (x^4+y^4)} - (x^4+y^4)\right)$$

(mimo $(0,0)$)

$\Rightarrow$ $\operatorname{div} F(X) < 0$ s.v. v $\mathbb{R}^2$

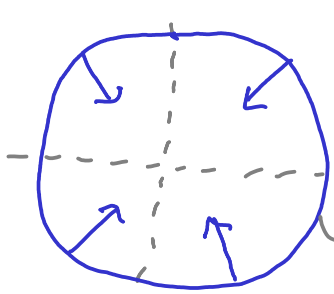
$\Rightarrow$ $\nexists$ periodický orbit.

(ii) $\varepsilon > 0$ ... chci užít V. 15.1 (Poincaré–Bendixson)

- $\dot V < 0$ pro $x^2+y^2 > R^2$, $R>0$ dost velké

dk: $$(x^2+y^2)^2 = x^4 + \underbrace{2x^2y^2}_{\leq x^4+y^4 \text{ (Young)}} + y^4 \leq 2(x^4+y^4)$$

$$\Rightarrow \dot V \leq (x^2+y^2)\underbrace{\left[2\varepsilon - \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right]}_{<0 \text{ pro } x^2+y^2>R}$$



$B(0,R)$ .... omezená, poz. inv.

¿ stacionární body?

$(0,0)$ … linearizace $\quad A_0 = \begin{pmatrix} 1, 1 \\ -1, 1 \end{pmatrix}$

$$\sigma(A_0) = 1 \pm i\sqrt{2}$$

$\Rightarrow (0,0) \notin \omega(p_0)$ pro $p_0 \neq (0,0)$

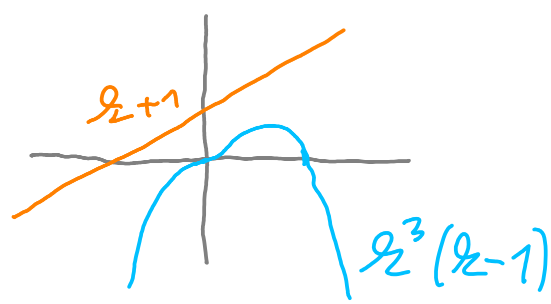
Snadíme: $\nexists$ jiné stac. body!!

dk.: nap. podělením rovnic

$$\frac{x+y}{-x+y} = \frac{x^3}{y^3} \Rightarrow \frac{z+1}{-1+z} = z^3$$

$(x = zy)$

$$z+1 = z^3(z-1)$$



CELKEM: $\xRightarrow{\text{V.15.1.}}$ $\forall p_0 \in B(0,R),\ p_0 \neq (0,0)$

$\omega(p_0) = \Gamma$ ← netriv. per. orbita v $B(0,R)$

③ $x \in \mathbb{R}^1$ ... centrální $\quad A=(0),\ f=\alpha z^3$

$(y,z) \in \mathbb{R}^2$ ... stabilní $\quad B=\begin{pmatrix}-1,0\\ 0,-2\end{pmatrix},\ g=\begin{pmatrix}x^2\\ -x^2\end{pmatrix}$

V. 20.1. (lokalizace) $\Rightarrow$ $\exists$ c.v. $\quad \boxed{\begin{aligned} y&=\phi_1(x)\\ z&=\phi_2(x)\end{aligned}}$

aproximace:

$$M_1=(\phi_1(x)-y)'=\phi_1' x' - y' = \phi_1'(\alpha\phi_2^3)+\phi_1-x^2$$
$$M_2=(\phi_2(x)-z)'=\phi_2' x' - z' = \phi_2'(\alpha\phi_2^3)+\underbrace{2\phi_2+x^2}$$

chci $=0$

zkusme: $\quad \begin{aligned}\psi_1(x)&=c_1x^2\\ \psi_2(x)&=c_2x^2\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}c_1&=1\\ c_2&=-\tfrac{1}{2}\end{aligned}$

chyba? $\quad M_1(\psi_1,\psi_2)=\psi_1'\alpha\psi_2^3=2\alpha x\left(-\tfrac{1}{2}x^2\right)^3$

$$\left[\begin{aligned}\psi_1(x)&=x^2\\ \psi_2(x)&=-\tfrac{1}{2}x^2\end{aligned}\right] \qquad = O(x^7)$$

(podobně pro M_2)

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} y&=\phi_1(x)=x^2+O(x^7)\\ z&=\phi_2(x)=-\tfrac{1}{2}x^2+O(x^7)\end{aligned}$$

V.20.2

slabé: stabilita $(0,0)$ $\Longleftrightarrow$ stabilita 0 pro

$$p' = \alpha\, \Phi_2^3(p)$$

aproximace:

$$p' = \alpha\left(-\frac{1}{2}p^2 + \mathcal{O}(p^7)\right)^3$$

$$p' = \alpha\left(-\frac{1}{8}p^6 + \mathcal{O}(p^{11})\right)$$

$\alpha \neq 0$ $\Rightarrow$ nestabilní

(sudé mocniny)

$\alpha = 0$ $\Rightarrow$ $p' = 0$; tj. stabilní, ne asympt.