21. Fourierovy řady.

Definice. Řada funkcí

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx] \tag{T}$$

kde a_k, $b_k \in \mathbb{R}$ jsou konstanty, se nazývá trigonometrická řada.

Poznámka. Pokud tato řada konverguje, je její součet 2π-periodická funkce. Lze naopak každou 2π-periodickou funkci napsat jako součet nějaké trigonometrické řady? – Jedna z hlavních otázek kapitoly.

Lemma 21.1. [Ortogonalita trigonometrických funkcí.]
(1) $\int_0^{2\pi} \sin nx = \int_0^{2\pi} \cos nx = 0$ pro $\forall n \neq 0$ celé,
(2) $\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx = 0$ pro $\forall m$, $n \geq 1$ celá,
(3) $\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx = \pi\delta_{mn}$ pro $\forall m$, $n \geq 1$ celá, (δ_{mn} je Kroneckerovo delta).

Poznámka. Předchozí lemma říká, že tzv. trigonometrický systém

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, ...\}$$

je ortogonální vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\, dx$.

Věta 21.1. [Výpočet trigonometrických koeficientů.] Nechť řada (T) konverguje stejnoměrně v $[0, 2\pi]$. Označme $f(x)$ její součet. Potom čísla a_k, b_k lze vypočíst podle vzorců:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\, dx \qquad k \geq 1 \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\, dx \qquad k \geq 1 \end{aligned} \tag{FK}$$

Značení. $f \in L^p_{\text{per}}(0, 2\pi)$ znamená, že f je měřitelná v $\mathbb{R}$, 2π-periodická a $\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\, dx < \infty$. Obecněji, $f \in X_{\text{per}}(I)$ kde X je nějaký prostor funkcí (např. C, C^1, $\dots$), značí, že funkce náleží to $X(I)$ a dále je rozšířená s periodou délky I.

Definice. Nechť $f \in L^1_{\text{per}}(0, 2\pi)$. Trigonometrická řada (T) s koeficienty (FK) se nazývá Fourierova řada funkce f. Značí se $\mathcal{F}_f$. Její n-tý částečný součet značíme

$$\mathcal{F}_{f,n}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos kx + b_k \sin kx\right].$$

Je tedy $\mathcal{F}_f(x) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_{f,n}(x)$. Čísla a_k, b_k se nazývají Fourierovy koeficienty funkce f.

Poznámky.
• je $\mathcal{F}_f(x) = f(x)$? Jistě ne vždy ve všech bodech – je-li $f = 0$ s.v., pak $a_k = b_k = 0$ a tedy nutně $\mathcal{F}_f \equiv 0$. Obecně, a_k, b_k a tudíž $\mathcal{F}_f$ „nevidí“ změny f na množině míry 0.
• $\mathcal{F}_f$ je vždy 2π-periodická, zkoumanou f tedy také rozšíříme 2π-periodicky.
• je-li f funkce 2π-periodická, potom $\int_0^{2\pi} f = \int_{-\pi}^{\pi} f = \int_a^{a+2\pi} f$ pro $\forall a \in R$
• f sudá $\implies$ $b_k = 0$ pro $\forall k$; f lichá $\implies$ $a_k = 0$ pro $\forall k$

Poznámka. Pro obecně l-periodickou funkci má Fourierova řada tvar

$$\mathcal{F}_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi}{l}kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{l}kx\right)\right]$$

kde

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{l}kx\right)dx\,, \quad b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{l}kx\right)dx\,.$$

Platí příslušné analogie výsledků této kapitoly. Například Parsevalova rovnost má tvar

$$\frac{2}{l}\int_0^l |f(x)|^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

Lemma 21.2. [Komplexní tvar Fourierovy řady.] Nechť $f \in L^1_{\text{per}}(0, 2\pi)$, nechť a_k, b_k jsou její Fourierovy koeficienty. Označme

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-ikx)\,dx\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Potom platí vztahy

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \quad k \geq 1 \\ c_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

respektive

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 \\ a_k &= c_k + c_{-k} \qquad k \geq 1 \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) \qquad k \geq 1 \end{aligned}$$

Pro n-tý částečný součet Fourierovy řady $\mathcal{F}_{f,n}(x)$ platí

$$\mathcal{F}_{f,n}(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \exp(ikx)\,,$$

a tedy (formálně)

$$\mathcal{F}_f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \exp(ikx)\,.$$

Lemma 21.3. [Integrální tvar F.ř.] Nechť $f \in L^1_{\text{per}}(0, 2\pi)$. Potom pro n-tý částečný součet F.ř. funkce f platí

$$\mathcal{F}_{f,n}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) D_n(z)\, dz$$

kde

$$D_n(z) = \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) z\right]}{2 \sin\left(\frac{z}{2}\right)}$$

se nazývá Dirichletovo integrační jádro.

Poznámky. • $D_n(z)$ je sudá, C^∞, 2π-periodická funkce.
• $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(z)\, dz = 1$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definice. Funkci f nazveme po částech spojitou v $[a, b]$, pokud existují body $x_0 = a < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b$ takové, že f je spojitá v intervalech (x_{j-1}, x_j) a navíc má v bodech x_j jednostranné vlastní limity.
Funkci nazveme po částech C^N, jsou-li funkce f, f', ..., $f^{(N)}$ po částech spojité.

Příklady. ① $\operatorname{sgn}(x)$ je po částech C^1, není spojitá
② $|x|$ je spojitá, je po částech C^1, není C^1
③ $\sqrt[3]{x}$ je spojitá, není po částech C^1 (derivace je nespojitá v $x = 0$, nemá zde konečné limity.)
④ $\ln x$ je spojitá v $(0, 1)$, ale není po částech spojitá v $[0, 1]$ - limita v nule zprava není konečná.

Pozorování. $f(x)$ je v $[a, b]$ po částech spojitá $\implies$ je zde omezená a měřitelná; speciálně $f(x) \in L^1(a, b)$.

Věta 21.2. [O konvergenci Fourierovy řady.] Nechť $f \in L^1_{\text{per}}(0, 2\pi)$ a navíc f je po částech C^1 v intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Potom pro $\forall x \in (a, b)$ je

$$\mathcal{F}_f(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}\,.$$

Speciálně $\mathcal{F}_f(x) = f(x)$ v těch bodech $x \in (a, b)$, kde je $f(x)$ spojitá.

Poznámka. V rámci předchozí věty jsme dokázali i tzv. Riemannův princip lokalizace, podle nějž $\mathcal{F}_f(x) = A \in \mathbb{R}$, právě když

$$\int_0^\delta \big[f(x+z) + f(x-z) - 2A\big] D_n(z)\, dz \to 0, \quad \text{pro } n \to \infty,$$

kde $D_n(z)$ je Dirichletovo jádro (viz Lemma 21.3 výše) a $\delta \in (0, \pi)$ je pevné, libovolné číslo.

Poznámka. Ohledně (ne)nastávání rovnosti

$$f(x) = \mathcal{F}_f(x) \tag{*}$$

je známo toto:

- lze sestrojit $f \in L^1_{\text{per}}(0, 2\pi)$ takovou, že příslušná Fourierova řada diverguje ve všech bodech; tedy (*) neplatí nikde.
- je-li $f \in L^p$, kde $p > 1$, pak už (*) platí skoro všude („hluboký“ výsledek s obtížným důkazem)
- pokud f je spojitá, stále mohou existovat body (dokonce nekonečně bodů) takové, že (*) neplatí.
- pokud f je spojitá, a f' je po částech spojitá, tak (*) platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$. To plyne z námi dokázané Věty 21.1.

Lemma 21.4.[1] [Riemann-Lebesgueovo.] Nechť $f \in L^1(a, b)$. Potom

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(kx)\, dx = 0\,, \qquad \lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x)\cos(kx)\, dx = 0\,.$$

Tvrzení. Každou $f \in L^1(a, b)$ lze libovolně aproximovat „pěknou“ funkcí. Přesněji řečeno: pro $\forall \varepsilon > 0$ existuje $\tilde{f}$ taková, že $\tilde{f}$ i $\tilde{f}'$ jsou spojité a omezené dokonce v $[a, b]$, a platí $\int_a^b |f(x) - \tilde{f}(x)|\, dx < \varepsilon$.

[1] Důkaz pro po částech spojité funkce.

Definice. Pro interval $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a $p \in [1, \infty)$ definuji

$$L^p(a, b) = \{f(x) : (a, b) \to \mathbb{R};\ f \text{ je měřitelná, } \int_a^b |f(x)|^p < \infty\}$$

tzv. L^p-integrovatelné funkce.

Poznámky.
• $L^1(a, b) = \mathcal{L}(a, b)$ ... Lebesgueovsky integrovatelné funkce
• $L^2(a, b)$ je velmi důležitý, neboť v něm lze zavést skalární součin $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx$; normu v prostoru L^2 definujeme

$$\|f\|_{L^2(a,b)} = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx}\,.$$

Ve vztahu k Fourierovým řadám platí v $L^2(0, 2\pi)$ následující v podstatě „Pythagorova věta“:

Věta 21.4.[2] [Parsevalova rovnost.] Nechť $f \in L^2_{\mathrm{per}}(0, 2\pi)$, nechť a_k, b_k jsou její Fourierovy koeficienty. Potom platí:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right).$$

Věta 21.3. [O hladkosti trigonometrické řady.] Nechť

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos kx + b_k \sin kx\right],$$

a existují $C > 0$, $N \geq 0$ celé tak, že platí

$$|a_k| + |b_k| \leq \frac{C}{k^{N+2}}, \qquad \forall k \geq 1\,.$$

Potom $f \in C^N(\mathbb{R})$.

Věta 21.5. [O rychlosti poklesu F.k.] Nechť $f \in C^N(\mathbb{R})$ je 2π-periodická, nechť navíc $f^{(N+1)}$, $f^{(N+2)}$ jsou po částech spojité. Potom pro Fourierovy koeficienty platí: existuje $C > 0$ tak, že pro každé $k \geq 1$

$$|a_k| + |b_k| \leq \frac{C}{k^{N+2}}\,.$$

[2] Pouze formální důkaz.

Důsledek. Vidíme, že hladkost funkce je přímo úměrná tomu, jak rychle Fourierovy koeficienty klesají do nuly.
Z předchozích vět vyplývá, že pro funkce s po částech spojitými derivacemi platí: $f \in C^N \backslash C^{N+1} \iff$ Fourierovy koeficienty splňují $|a_k|+|b_k| \sim 1/k^{N+2}$.
Jestliže f, f' jsou po částech spojité, ale f není spojitá, pak $|a_k|+|b_k| \sim 1/k$.

Věta 21.6. [Integrování Fourierovy řady.] Nechť f je po částech spojitá, 2π-periodická, nechť a_k, b_k jsou její Fourierovy koeficienty. Potom pro $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^x f(t)\,dt - \frac{a_0}{2}x = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{-b_k}{k}\cos kx + \frac{a_k}{k}\sin kx\right]$$

kde $A_0 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$.

Poznámka. Závěr předchozí věty dostaneme ,,formálně“ integrováním rovnosti $\mathcal{F}_f = f(x)$; ta ovšem za daných předpokladů nemusí platit.

Důsledek. Nechť $f(x)$ je spojitá, 2π-periodická funkce. Nechť všechny její Fourierovy koeficienty jsou nulové. Potom $f(x)$ je identicky nulová v $\mathbb{R}$.

Tvrzení. Nechť $f(x)$ je spojitá, 2π-periodická funkce, nechť a_k, b_k jsou její Fourierovy koeficienty. Potom:
1. pokud $a_k = 0$ pro $\forall k$, je $f(x)$ lichá;
2. pokud $b_k = 0$ pro $\forall k$, je $f(x)$ sudá.

22. Abstraktní Fourierovy řady.

Opakování. Vektorový prostor X je množina, jejíž prvky lze sčítat, násobit skalárem (typicky z $\mathbb{C}$), a obsahuje prvek 0 (nulový vektor.)
Norma je přiřazení $x \mapsto \|x\|$, splňující:

1. $\|x\| \geq 0$, a $\|x\| = 0$ právě když $x = 0$
2. $\|ax\| = |a|\|x\|$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost)

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Pro $p \in [1, \infty)$ definujeme

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} : \ f \text{ je měřitelná, } \int_\Omega |f(x)|^p\,dx < \infty \right\}$$

respektive pro $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} : \ f \text{ je měřitelná a } \exists C \text{ tak, že } |f(x)| \leq C \text{ s.v. v } \Omega \ \right\}$$

Terminologie: funkce L^p-integrovatelné resp. esenciálně omezené.
Norma na prostoru $L^p(\Omega)$ se definuje pro $p < \infty$ jako

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left\{ \int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}$$

respektive pro $p = \infty$ jako

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \big\{ C > 0 : \ |f(x)| \le C \text{ s.v. v } \Omega \big\}$$

Poznámka. Obecně $\|f\|_{L^p(\Omega)} = 0$ implikuje jen $f = 0$ s.v. a nikoliv $f = 0$.
Řešení: v prostorech L^p považuji funkce, které se rovnají skoro všude, za totožné. (Například Dirichletovu funkci a funkci nulovou.)
Důsledek: nemá smysl hovořit o takových vlastnostech funkce z L^p, které se změní, změním-li funkci na množině míry nula (například hodnota v jednom bodě.) Má smysl hovořit jen o takových vlastnostech, které na takové změně nezáleží (například integrál přes měřitelnou množinu, speciálně norma).

Lemma 22.1. [Youngova nerovnost.] Nechť a, $b \ge 0$ a nechť $1 < p$, $q < \infty$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Poznámka. Speciálně pro $p = q = 2$: $ab \le a^2/2 + b^2/2$.

Lemma 22.2. [Hölderova nerovnost.] Nechť $u(x)$, $v(x) : \Omega \to \mathbb{R}^*$ jsou měřitelné, nechť p, $q \in (1, \infty)$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom

$$\int_\Omega |u(x)v(x)| dx \le \Big(\int_\Omega |u(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_\Omega |u(x)|^q dx \Big)^{\frac{1}{q}} .$$

(S úmluvou $0 \cdot \infty = 0$.)

Lemma 22.3. [Minkowského nerovnost.] Pro $p \in (1, \infty)$ a f, $g : \Omega \to \mathbb{R}^*$ měřitelné je

$$\Big(\int_\Omega |f(x) + g(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\int_\Omega |f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_\Omega |g(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Důsledek. Trojúhelníková nerovnost pro normu v $L^p(\Omega)$.

Poznámky. ① Lze dokázat, že $L^p(\Omega)$ je úplný prostor. Viz Jarník: Integrální počet II, Věta 199, s. 545.
② Dalším důležitým tvrzením je hustota $C_c^\infty(\Omega)$ v $L^p(\Omega)$:

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big) \big(\forall f \in L^p(\Omega)\big) \big(\exists g \in C_c^\infty(\Omega)\big) \Big[\|f - g\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon \Big].$$

POZOR: platí pouze pro $p < \infty$; v prostoru L^∞ hladké funkce husté nejsou.

Opakování. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný vektorový prostor. Pomocí normy definujeme konvergenci posloupnosti

$$x_n \to x_0 \text{ v } X \qquad \text{právě když} \qquad \|x_n - x_0\| \to 0.$$

Analogicky konvergenci řady: $\sum_{k=1}^\infty x_k = s$ (kde x_k, $s \in X$), právě když $s_n \to s$, kde $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$.

Definice. Posloupnost x_n se nazve cauchyovská, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big[m, n \geq n_0 \implies \|x_n - x_m\| < \varepsilon\big]\,.$$

Prostor, ve kterém cauchyovská posloupnost je vždy konvergentní (tj. má limitu) se nazývá úplný. Normovaný vektorový prostor, který je úplný, se nazývá Banachův prostor.

Příklady. $\mathbb{R}^n$ (s eukleidovskou normou) je Banachův prostor – úplnost byla dokázána dokázána loni v přednášce nMAF052. Výše definované prostory $L^p(\Omega)$ jsou Banachovy.

*** Věta 22.1.** Nechť X je Banachův prostor, $x_k \in X$. Jestliže $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\|$ konverguje, pak také řada $\sum_{k=1}^\infty x_k$ konverguje. (Absolutní konvergence implikuje konvergenci.)

Opakování. Skalární součin je přiřazení x, $y \mapsto \langle x, y\rangle$, splňující:

1. přiřazení $x \mapsto \langle x, y\rangle$ je lineární (při y pevném)
2. $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$
3. $\langle x, x\rangle \geq 0$, a $\langle x, x\rangle = 0$ právě když $x = 0$.

Poznámky. • Z 1., 2. plyne: $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$, a $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$, $\langle x, ay\rangle = \overline{a}\langle x, y\rangle$.
• (důležité) skalární součin vždy vytváří normu předpisem $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Platí tzv. Cauchy-Schwartzova nerovnost

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|\,.$$

Definice. Prostor se skalárním součinem, který je úplný (vzhledem k normě, vytvořené skalárním součinem), se nazývá Hilbertův prostor.

Úmluva. V dalším značí H Hilbertův prostor. Tj. prostor se skálárním součinem, který uvažujeme automaticky s normou $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, a který je úplný.

Příklad. Prostor $L^2(\Omega)$ se skalárním součinem

$$\langle f, g\rangle := \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

je Hilbertův prostor. (Samozřejme $\mathbb{R}^n$ je Hilbertův, ale nás budou nadále zajímat nekonečně-dimenzionální případy.)

Lemma 22.4.

1. přiřazení $x \mapsto \|x\|$ je spojité

2. přiřazení $x,\ y \mapsto \langle x, y\rangle$ je spojité

Definice. Řekneme, že $\{x_n\} \subset H$ tvoří ortogonální (OG) systém, jestliže $x_n \neq 0$, a $\langle x_n, x_m\rangle = 0$ pro $m \neq n$. Systém se nazve ortonormální, pokud navíc $\|x_n\| = 1$ pro $\forall n$.

Příklad. Trigonometrický systém

$$\big\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \dots\big\}$$

je OG v prostoru $L^2(0, 2\pi)$. Viz Lemma 21.1.
Z ortogonálního systému vznikne ortonormální, klademe-li $\tilde{x}_n = x_n/\|x_n\|$. ON trigonometrický systém je

$$\Big\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \dots\Big\}\,.$$

Klíčová otázka kapitoly. Je dán nějaký OG systém $\{x_n\} \subset H$, a my se ptáme, zda každý prvek $x \in H$ lze vyjádřit jako $\sum_{k=1}^\infty c_k x_k$.

Věta 22.2. [Tvar abstraktních Fourierových koeficientů.] Nechť $\{x_n\} \subset H$ je OG systém, $c_k \in \mathbb{C}$, nechť řada $\sum_{k=1}^\infty c_k x_k$ konverguje a má součet $x \in H$. Potom

$$c_k = \frac{\langle x, x_k\rangle}{\langle x_k, x_k\rangle} \qquad \forall k\,. \tag{FK}$$

Definice. Nechť $\mathscr{S} = \{x_n\} \subset H$ je OG systém, a $x \in H$ je libovolné. Řada $\sum_{k=1}^\infty c_k x_k$, kde čísla $c_k \in \mathbb{C}$ jsou definována v (FK) výše, se nazývá Fourierova řada prvku x vzhledem k systému $\mathscr{S}$.
Značí se $F_{x,\mathscr{S}}$. Čísla c_k se nazývají Fourierovy koeficienty (prvku x vzhledem k systému $\mathscr{S}$.)

Věta 22.3. [O konvergenci abstraktní F.ř.] Nechť $\mathscr{S} = \{x_n\} \subset H$ je OG systém, $x \in H$ je libovolné, c_k a $F_{x,\mathscr{S}}$ jsou jak řečeno výše. Potom platí:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|x_k\|^2 \leq \|x\|^2$
2. řada $F_{x,\mathscr{S}}$ konverguje (ve smyslu normy v H)
3. $F_{x,\mathscr{S}} = x$ právě tehdy, když v bodě 1. nastává rovnost.

Definice. OG systém $\{x_n\} \subset H$ se nazve úplný, pokud platí: je-li $x \in H$ takové, že $\langle x, x_n \rangle = 0$ pro $\forall n$, pak nutně $x = 0$.

Příklady. ① Trigonometrický systém je úplný v $L^2(0, 2\pi)$. ② Další známé OG systémy (Legendreovy, Hermitovy, Čebyševovy polynomy) jsou vesměs úplné v příslušných prostorech.

Věta 22.4. [Ekvivalentní vyjádření úplnosti OG systému.] Nechť H je Hilbertův prostor, $\mathscr{S} = \{x_n\}$ je OG systém. Potom je ekvivalentní:

1. systém $\{x_n\}$ je úplný
2. pro $\forall x \in H$ platí $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|x_k\|^2 = \|x\|^2$
3. pro $\forall x \in H$ platí $F_{x,\mathscr{S}} = x$

Zde c_k, $F_{x,\mathscr{S}}$ jsou Fourierovy koeficienty resp. Fourierova řada pro x vzhledem k systému $\{x_n\}$.

Věta 22.5.[3] [O nejlepší aproximaci.] Nechť H je Hilbertův prostor, $\mathscr{S} = \{x_n\} \subset H$ je OG systém. Nechť $x \in H$ je libovolné, c_k jsou Fourierovy koeficienty prvku x vzhledem k systému $\{x_n\}$, a $a_k \in \mathbb{C}$ libovolná čísla taková, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ konverguje. Potom

$$\|x - \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k\| \leq \|x - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\| \,,$$

a rovnost nastává právě když $c_k = a_k$ pro $\forall k$.

23. Funkce komplexní proměnné.

Definice.

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + iy : \ x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

kde $i^2 = -1$ (imaginární jednotka), $\operatorname{Re} z = x$ (reálná část), $\operatorname{Im} z = y$ (imaginární část), $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (absolutní hodnota), $\overline{z} = x - iy$ (číslo komplexně sdružené).
Poznámka. Ztotožnění: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $z = x + iy \leftrightarrow (x, y)$. Shoduje se i $|z| = \|(x, y)\|_2$.

[3] Bez důkazu.

Definice. $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Terminologie: $\mathbb{C}$ ... otevřená Gaussova rovina, $\mathbb{S}$ ... uzavřená Gaussova rovina alias Riemannova sféra, ∞...komplexní nekonečno. Okolí bodu ($z_0 \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{S}$):

$$U(z_0, \varepsilon) = \big\{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < \varepsilon\big\}$$
$$U(\infty, \varepsilon) = \big\{z \in \mathbb{C};\ |z| > \frac{1}{\varepsilon}\big\} \cup \big\{\infty\big\}$$
$$P(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$$

Početní pravidla: • $a \pm \infty = \infty$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$
• $a \cdot \infty = \infty$ pro $\forall a \in \mathbb{S} \setminus \{0\}$
• $a/\infty = 0$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$
• $\boxed{a/0 = \infty}$ pro $\forall a \in \mathbb{S} \setminus \{0\}$
Nedefinováno zůstává: $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞, $\infty \pm \infty$.

Příklady. [Funkce komplexní proměnné.]
• polynomy, racionální funkce.
• e^z, $\sin z$, $\cos z$ - definovány mocinnou řadou, která (absolutně) konverguje pro $\forall z \in \mathbb{C}$. Klíčový vztah:

$$\exp(a + ib) = \exp(a)[\cos b + i \sin b]$$

Definice. Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definujeme

$$\log z = \big\{\zeta \in \mathbb{C} :\ \exp \zeta = z\big\}$$
$$\arg z = \big\{\beta \in \mathbb{R} :\ z = |z| \exp(i\beta)\big\}$$
$$\operatorname{Log} z = \big\{\zeta \in \log z :\ \operatorname{Im}(\zeta) \in (-\pi, \pi]\big\}$$
$$\operatorname{Arg} z = \big\{\beta \in \arg z :\ \beta \in (-\pi, \pi]\big\}$$

Poznámky. • log, arg nejsou to funkce v klasickém smyslu: číslu je přiřazena množina. Např.: $\log 1 = \{2k\pi i :\ k \in \mathbb{Z}\}$.
• Log, Arg funkce jsou: číslu je přiřazeno právě jedno číslo.
• platí vztahy (ln je klasický reálný logaritmus):

$$\zeta \in \log z \iff \operatorname{Re} \zeta = \ln |z| \ \&\ \operatorname{Im} \zeta \in \arg z$$
$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$

Definice. [Komplexní mocnina.] Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{C}$ definujeme

$$m_a(z) = \big\{ \exp(a\zeta) :\ \zeta \in \log z\big\}$$

Definice. Pro $z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z) : U(z_0) \to \mathbb{C}$ definujeme

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,.$$

Limitu chápu v $\mathbb{C}$ a musí být vlastní. Ekvivalentní definice: $f'(z_0) = A$ právě když

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + Ah + r(h)$$

kde $r(h) = o(|h|)$ pro $h \to 0$.
Značím $f^{(1)}(z) = f'(z)$ a indukcí $f^{(n+1)}(z) = [f^{(n)}(z)]'$.

*** Věta 23.1.** Platí:
(1) $(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$
(2) $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
(3) $(f/g)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$ pokud $g(z) \neq 0$
(4) $(f_{-1})'(w) = 1/f'(f_{-1}(w))$, je-li $f(z)$ prostá a $f'(z) \neq 0$
(5) $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$

Úmluva. Ω je otevřená část $\mathbb{C}$.

Definice. Funkce $f(z) : \Omega \to \mathbb{C}$ se nazve holomorfní v Ω, pokud $f'(z)$ existuje všude v Ω. Značíme $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Příklady. • polynom $P(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$
• racionální funkce $R(z) = P(z)/Q(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{z :\ Q(z) = 0\})$
• e^z, $\sin z$, $\cos z \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ (neboť mocninnou řadu lze derivovat člen po členu, viz loňská Věta 11.4.)
• Věta 23.1. $\Longrightarrow$ sčítáním, odčítáním, násobením, dělením, invertováním a skládáním holomorfních funkcí vzniká funkce holomorfní (na patřičném definičním oboru)

Poznámka. Ztotožnění $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ... ztotožnění $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s funkcí $\boldsymbol{F}(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $z = x + iy$ a $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2) = (\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f)$.

Příklad. $f(z) = z^2$ odpovídá $\boldsymbol{F}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

Věta 23.2. [Cauchy-Riemannovy podmínky.] Nechť $f(z) : U(z_0) \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Nechť $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2)(x, y) : U((x_0, y_0)) \to \mathbb{R}^2$ jí odpovídá dle výše uvedeného ztotožnění, kde $z_0 = x_0 + iy_0$. Potom následující je ekvivalentní:
(1) existuje $f'(z_0)$ (derivace podle komplexní proměnné)
(2) funkce $\boldsymbol{F}$ má v bodě (x_0, y_0) totální diferenciál a navíc v (x_0, y_0) platí tzv. Cauchy-Riemannovy podmínky:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = -\frac{\partial F_1}{\partial y}$$

Během důkazu také zjistíme, že platí:

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} - i\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial y} + i\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)}$$

Poznámky. • holomorfnost funkce (=existence $f'(z)$) je mnohem restriktivnější, než se zdá na první pohled, a má řadu důsledků.
• funkce $f(z) = \operatorname{Re} z$ není holomorfní: nesplní C.R. podmínky.

*** Věta 23.3.** Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$ a $f'(z) \neq 0$ v Ω. Potom systémy křivek $\{\operatorname{Re} f = konst\}$ a $\{\operatorname{Im} f = konst\}$ jsou navzájem ortogonální. Tj., tyto křivky se mohou protínat jen pod pravým úhlem.

Příklad. Křivky $\operatorname{Re}(z^2) = c$ (tj. hyperboly $x^2 - y^2 = c$) a $\operatorname{Im}(z^2) = c$ (tj. lomené funkce $2xy = c$.)

Opakování. Řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \qquad (M)$$

(kde z, z_0, $a_k \in \mathbb{C}$) se nazývá mocninná řada o středu z_0. Existuje (jednoznačně určené) číslo $R \in [0, +\infty]$ tak, že řada (M) konverguje pro každé $z \in U(z_0, R)$ a diverguje pro $|z - z_0| > R$. Na množině $U(z_0, R)$ lze řadu libovolně krát derivovat/integrovat (dle komplexní proměnné.) Speciálně, její součet je zde holomorfní. Viz kapitola 11.

Definice. Nechť z_0, $a_k \in \mathbb{C}$. Řada

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \qquad (1)$$

se nazývá Laurentova („lóránova“) řada o středu z_0. Chápeme ji jako součet řad

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \qquad \text{resp.} \qquad (3) \quad \sum_{l=1}^{\infty} a_{-l}(z-z_0)^{-l},$$

které se nazývají regulární resp. hlavní část řady (1). Řekneme, že (1) konverguje (absolutně konverguje), pokud řady (2) a (3) mají tuto vlastnost.

Poznámky.
• jde o zobecnění pojmu mocninné řady
• úmluva: $a^0 = 1$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$
• (3) a potažmo (1) nemá smysl pro $z = z_0$

Značení. Pro $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq +\infty$ definuji mezikruží

$$P(z_0; r, R) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \; r < |z - z_0| < R \right\}.$$

Věta 23.4. [Konvergence Laurentovy řady.] Je dána Laurentova řada (1). Potom existují jednoznačně určená čísla r, $R \in [0, +\infty]$ tak, že:
(i) regulární část (2) absolutně konverguje pokud $|z - z_0| < R$ a diverguje pokud $|z - z_0| > R$;
(ii) hlavní část (3) absolutně konveguje pokud $|z - z_0| > r$ a diverguje pokud $|z - z_0| < r$.
Je-li $r < R$, pak Laurentova řada konverguje absolutně v $P(z_0; r, R)$ a její součet zde můžeme derivovat člen po členu.
Terminologie: $P(z_0; r, R)$ se nazve mezikruží konvergence Laurentovy řady.

Poznámky.
• speciálně: Laurentova řada určuje v mezikruží konvergence holomorfní funkci
• dokážeme obrácené tvrzení: funkce holomorfní v mezikruží je vždy součtem jisté Laurentovy řady

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$. Křivkou v Ω nazýváme funkci $\varphi(t) : [a, b] \to \Omega$, která je spojitá, po částech C^1 a $\varphi'(t) \neq 0$ až na konečně výjimek.
Definujeme geometrický obraz křivky $\langle \varphi \rangle = \{\varphi(t);\ t \in [a, b]\}$, počáteční bod p.b. $= \varphi(a)$, koncový bod k.b. $= \varphi(b)$. Křivka je uzavřená, je-li $\varphi(a) = \varphi(b)$. Křivka je jednoduchá, pokud $\varphi(t)$ je prosté na $[a, b]$; jednoduchá uzavřená, pokud $\varphi(a) = \varphi(b)$ a $\varphi(t)$ je prosté na $[a, b)$.
Jednoduchá, uzavřená křivka se nazývá Jordanova. Oblast ohraničená Jordanovou křivkou φ se značí $\operatorname{int} \varphi$ (od ,,interior“, vnitřek).

Definice. Množina $\Omega \subset \mathbb{C}$ se nazve souvislá, jestliže libovolné její dva body lze spojit křivkou, ležící v Ω. Otevřená, souvislá množina se nazývá oblast.
Množina Ω je jednoduše souvislá, je-li souvislá a navíc, každá uzavřená křivka se dá spojitě stáhnout do bodu, aniž opustí Ω.

Definice. Nechť φ je křivka. Pro funkci $f(z) : \langle \varphi \rangle \to \mathbb{C}$ definuji křivkový integrál jako

$$\int_\varphi f(z)\, dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt\,.$$

Dále definuji délku křivky

$$L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|\, dt\,.$$

Poznámky. Integrál komplexní funkce na intervalu, tj. $g(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$, definujeme
$$\int_a^b g(t)\,dt := \int_a^b \operatorname{Re} g(t)\,dt + i\int_a^b \operatorname{Im} g(t)\,dt\,.$$
Snadno se ověří, že $\int_a^b [g(t)+h(t)]\,dt = \int_a^b g(t)\,dt + \int_a^b h(t)\,dt$, $\int_a^b cg(t)\,dt = c\int_a^b g(t)\,dt$, pro $c \in \mathbb{C}$.
Integrály chápu jako Lebesgueovy, ale v praxi je počítám jako přírustek primitivní funkce: pokud existuje C^1 funkce $G(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ taková, že $G'(t) = g(t)$, pak $\int_a^b g(t)\,dt = G(b) - G(a)$.

Lemma 23.1. Nechť $g(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$. Potom
$$\Big|\int_a^b g(t)\,dt\Big| \le \int_a^b |g(t)|\,dt\,.$$

Definice. Je-li $\varphi(t) : [a,b] \to \Omega$ křivka, definuji křivku opačnou $\dot{-}\varphi := \chi$, kde $\chi(t) = \varphi(-t)$, $t \in [-b,-a]$.
Jsou-li $\varphi(t) : [a,b] \to \Omega$, $\psi(t) : [c,d] \to \Omega$ křivky, a k.b.φ =p.b.ψ, definujeme součet křivek $\varphi \dot{+} \psi := \chi$, kde $\chi(t) : [a, b+d-c] \to \Omega$ je definována
$$\chi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a,b] \\ \psi(t+c-b), & t \in [b, b+d-c] \end{cases}$$

Věta 23.5. [4] [Vlastnosti křivkového integrálu v $\mathbb{C}$.] Nechť φ, ψ jsou křivky v Ω, $f(z)$, $g(z) : \Omega \to \mathbb{C}$. Potom

1. $\int_\varphi [f(z)+g(z)]\,dz = \int_\varphi f(z)\,dz + \int_\varphi g(z)\,dz$.
2. $\int_\varphi cf(z)\,dz = c\int_\varphi f(z)\,dz$ pro $\forall c \in \mathbb{C}$.
3. $\int_{\varphi\dot{+}\psi} f(z)\,dz = \int_\varphi f(z)\,dz + \int_\psi f(z)\,dz$.
4. $\int_{\dot{-}\varphi} f(z)\,dz = -\int_\varphi f(z)\,dz$.
5. Je-li $|f(z)| \le M$ pro $\forall z \in \langle\varphi\rangle$, pak
$$\Big|\int_\varphi f(z)\,dz\Big| \le ML(\varphi)\,.$$

[4] Důkaz jen 5. a 6. části.

6. Pokud existuje $F(z) : \Omega \to \mathbb{C}$ taková, že $F'(z) = f(z)$, přičemž F i f jsou spojité, pak

$$\int_\varphi f(z)\, dz = F(k.b.\varphi) - F(p.b.\varphi)\,.$$

Důležitý příklad. Pro $n \in \mathbb{Z}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ a křivku $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ je

$$\int_\varphi (z - z_0)^n\, dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

Věta 23.6. [Cauchyho věta.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$, a φ je Jordanova křivka v Ω taková, že $\operatorname{int}\varphi \subset \Omega$. Potom

$$\int_\varphi f(z)\, dz = 0\,.$$

Poznámka. Klíčový je předpoklad, že $\operatorname{int}\varphi \subset \Omega$, neboli φ neobíhá kolem žádné singularity $f(z)$. Pro jednoduše souvislou Ω je vždy splněn.

Lemma 23.2. [O velké půlkružnici.] Nechť $\varphi_R := R\,\mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Nechť existuje $R_0 > 0$ takové, že $f(z)$ je spojitá v množině $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0,\ |z| > R_0\}$. Potom:

1. Platí-li pro $|z| > R_0$ odhad $|f(z)| \leq K/|z|^2$, pak

$$\int_{\varphi_R} f(z)\, dz \to 0, \quad R \to +\infty\,.$$

2. Platí-li pro $|z| > R_0$ odhad $|f(z)| \leq K/|z|$ a $a > 0$ je pevné, pak

$$\int_{\varphi_R} f(z)\, \mathrm{e}^{iaz}\, dz \to 0, \quad R \to +\infty\,.$$

Poznámka. Předpoklad $|f(z)| \leq K/|z|$ (resp. $|f(z)| \leq K/|z|^2$) pro $|z| > R_0$ velké je splněn typicky pokud $f(z) = P(z)/Q(z)$, kde P, Q jsou polynomy a $\operatorname{st} Q \geq \operatorname{st} P + 1$ (resp. $\operatorname{st} Q \geq \operatorname{st} P + 2$.)

Lemma 23.3. [O malé (půl)kružnici.] Nechť $f(z)$ je spojitá v $P(z_0)$ a nechť $f(z)(z - z_0) \to A \in \mathbb{C}$ pro $z \to z_0$. Nechť $\varphi_r = z_0 + r\,\mathrm{e}^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Potom

$$\int_{\varphi_r} f(z)\, dz \to iA(\beta - \alpha), \quad r \to 0+\ .$$

Poznámka. Často používaný speciální případ: je-li $g(z)$ spojitá v $U(z_0)$, je

$$\lim_{r\to 0+} \int_{\varphi_r} \frac{g(z)}{z-z_0}\, dz = i g(z_0)(\beta-\alpha)\,.$$

Věta 23.7. [Cauchyho vzorec.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$, a φ je kladně orientovaná Jordanova křivka v Ω taková, že $\operatorname{int}\varphi \subset \Omega$. Potom pro $\forall z_0 \in \operatorname{int}\varphi$ platí

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz\,.$$

Důsledky.
• $f(z)$ je v $\operatorname{int}\varphi$ nekonečněkrát diferencovatelná a platí zde

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz\,.$$

• hodnoty $f(z)$ uvnitř křivky jsou jednoznačně určeny hodnotami $f(z)$ na křivce samé.

Věta 23.8. [Liouville.] Nechť $f(z)$ je holomorfní a omezená v $\mathbb{C}$. Potom $f(z)$ je konstantní.

* **Věta 23.9.** [Základní věta algebry.] Nechť $P(z)$ je polynom, $\operatorname{st} P \geq 1$. Potom existuje $z_0 \in \mathbb{C}$ takové, že $P(z_0) = 0$.

Věta 23.10. [Existence Laurentova rozvoje.] Nechť $f(z)$ je holomorfní v mezikruží $P(z_0; r, R)$, kde $0 \leq r < R \leq +\infty$. Potom platí

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k\,, \qquad z \in P(z_0; r, R)\,. \tag{1}$$

Tato řada se nazývá Laurentův rozvoj $f(z)$ o středu z_0. Konverguje stejnoměrně na množinách striktně uvnitř $P(z_0; r, R)$. Čísla a_k (tzv. Laurentovy koeficienty) jsou určena jednoznačně, a platí

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz\,, \tag{2}$$

kde φ je libovolná kružnice $z_0 + \rho\, \mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\rho \in (r, R)$.

Věta 23.11. [Taylorův rozvoj.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$. Potom

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k\,, \qquad \text{kde} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\,,$$

platí v každém kruhu $U(z_0, R)$, který je částí Ω.

Definice. Bod z_0 nazýváme izolovanou singularitou funkce, jestliže $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0, \delta))$ pro nějaké $\delta > 0$.

Definice. Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0, \delta))$. Koeficient a_{-1} v Laurentově rozvoji funkce $f(z)$ o středu z_0 nazýváme reziduum funkce $f(z)$ v bodě z_0. Značíme $\operatorname{res}_{z_0} f(z)$. Vzhledem k formuli (2) výše máme

$$\int_\varphi f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_0} f(z)$$

(pro libovolnou kružnici $\varphi = z_0 + \varepsilon\, \mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\varepsilon \in (0, \delta)$.) Pokud je $f(z)$ holomorfní dokonce v $U(z_0, \delta)$, je $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = 0$.

Věta 23.12. [Reziduová věta.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega \setminus K)$, kde Ω je oblast, K je konečná množina singularit. Nechť φ je kladně orientovaná Jordanova křivka v Ω taková, že $\operatorname{int} \varphi \subset \Omega$ a $\langle \varphi \rangle \cap K = \emptyset$. Potom

$$\int_\varphi f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{\zeta \in K \cap \operatorname{int} \varphi} \operatorname{res}_\zeta f(z)\,.$$

Věta 23.13. [Pravidla pro výpočet rezidua.]

1. Nechť $f(z) = g(z)/(z - z_0)^n$, kde $g(z) \in \mathcal{H}(U(z_0, \delta))$, $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{g^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}\,.$$

2. Nechť $f(z) = g(z)/h(z)$, kde $g(z)$, $h(z) \in \mathcal{H}(U(z_0, \delta))$ a $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$. Potom

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}\,.$$

3. * Nechť $f(z) = g(z)/h(z)$, kde $g(z)$, $h(z) \in \mathcal{H}(U(z_0, \delta))$ a $h(z_0) = h'(z_0) = \cdots = h^{(p-1)}(z_0) = 0$, avšak $h^{(p)}(z_0) \neq 0$. Potom

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to z_0} \Big[(z - z_0)^p f(z)\Big]^{(p-1)}\,.$$

Poznámka. Často používaný speciální případ bodu 1:

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{g(z)}{z - z_0} = g(z_0)\,, \qquad \operatorname{res}_{z_0} \frac{g(z)}{(z - z_0)^2} = g'(z_0)\,.$$

Definice. Nechť z_0 je izolovaná singularita $f(z)$, nechť $a_k \in \mathbb{C}$ jsou koeficienty příslušného Laurentova rozvoje v $P(z_0, \delta)$. Bod z_0 se nazývá:
(i) odstranitelná singularita, je-li $a_k = 0$ pro $\forall k < 0$
(ii) pól násobnosti $p \in \mathbb{N}$, je-li $a_{-p} \neq 0$ a $a_k = 0$ pro $\forall k < -p$
(iii) podstatná singularita, je-li $a_k \neq 0$ pro nekonečně $k < 0$

Příklady. Následující funkce mají v bodě $z_0 = 0$:
• $\frac{\sin z}{z}$, $\frac{1-\cos z}{z^2}$ ... odstranitelné singularity
• $\frac{e^z}{z^3}$ ... pól násobnosti 3
• $\cosh(1/z)$ ... podstatnou singularitu

* **Věta 23.14.** [Charakterizace odstranitelné singularity.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0, \delta))$. Potom je ekvivalentní:
(1) $f(z)$ má v bodě z_0 odstranitelnou singularitu
(2) existuje $g(z) \in \mathcal{H}(U(z_0, \delta))$ tak, že $f(z) = g(z)$ na $P(z_0, \delta)$
(3) existuje konečná $\lim_{z \to z_0} f(z)$
(3) $f(z)$ je omezená na jistém $P(z_0, \delta')$

* **Věta 23.15.** [Charakterizace pólu.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0, \delta))$. Potom je ekvivalentní:
(1) existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $f(z)$ má v z_0 pól násobnosti p
(2) $f(z) \to \infty$ pro $z \to z_0$

* **Věta 23.16.** [Charakterizace podstatné singularity.] Buď $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0, \delta))$. Potom je ekvivalentní:
(1) $f(z)$ má v z_0 podstatnou singularitu
(2) pro $\forall \delta' \in (0, \delta)$ je množina $f(P(z_0, \delta'))$ hustá v $\mathbb{C}$.

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Množina $M \subset X$ se nazve *hustá* v X, jestliže
$$\big(\forall w \in X\big)\big(\forall \delta > 0\big)\big[M \cap U(w, \delta) \neq \emptyset\big].$$
Ekvivalentně: pro $\forall w \in X$ existuje posloupnost $x_n \in M$ taková, že $x_n \to w$.
Bod $w \in X$ nazveme hromadným bodem množiny M, jestliže
$$\big(\forall \delta > 0\big)\big[M \cap P(w, \delta) \neq \emptyset\big].$$
Ekvivalentně: existují $x_n \in M$ takové, že $x_n \to w$, avšak $x_n \neq w$ pro $\forall n$.
Hromadné body množiny M značíme $\operatorname{der} M$.

Příklady. 1 $\operatorname{der} \mathbb{Q} = \mathbb{R}$
2 konečná množina nemá žádné hromadné body
3 množina $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ má jediný hromadný bod: 0

Lemma 23.4. [O rozvoji v okolí hromadného bodu.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$ a nechť z_0 je hromadný bod množiny $N = \{\zeta : f(\zeta) = 0\}$. Potom $f(z) \equiv 0$ v $U(z_0, R)$.

* **Věta 23.17.** [O jednoznačnosti.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$, kde Ω je otevřená, souvislá množina. Nechť $N = \{\zeta : \ f(\zeta) = 0\}$ má v Ω alespoň jeden hromadný bod. Potom $f(z) \equiv 0$ v Ω.

Důsledek. Nechť $f_1(z)$, $f_2(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, a $f_1(x) = f_2(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$. Potom $f_1(z) = f_2(z)$ pro $\forall z \in \mathbb{C}$.

24. Fourierova transformace.

Definice. Pro $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definujeme Fourierovu transformaci

$$\big[\mathcal{F}f\big](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi i(x,\xi)}\,dx\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n\,.$$

Dále definujeme inverzní Fourierovu transformaci

$$\big[\mathcal{F}_{-1}f\big](\xi) = f^{\vee}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{e}^{2\pi i(x,\xi)}\,dx\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n\,.$$

Zde (x,ξ) je skalární součin x, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Poznámky.
- korektnost: $|\exp\{\pm 2\pi i(x,\xi)\}| = 1$, majoranta integrálu $|f(x)| \in L^1$
- $\mathcal{F}$ přiřazuje funkci $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ funkci $\widehat{f}(\xi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$
- jiná varianta definice (ne ekvivalentní):

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i(x,\xi)}\,dx\,, \qquad f^{\vee}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i(x,\xi)}\,dx\,.$$

- vztah $\mathcal{F}_{-1}\{\mathcal{F}f\} = f$ není zřejmý, ověříme časem
- Pro $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(2\pi\xi x)\,dx - i\int_{\mathbb{R}} f(x)\sin(2\pi\xi x)\,dx$$

\- souvislost s Fourierovými řadami.

Příklad. Nechť $\mathrm{rect}(x) = 1$ pro $x \in (-1/2, 1/2)$ a 0 jinde (tzv. „čtvercová funkce“ / rectangular function). Potom $\widehat{\mathrm{rect}}(0) = 1$ a

$$\widehat{\mathrm{rect}}(\xi) = \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\,, \qquad \xi \neq 0\,.$$

Věta 24.1. [Základní vlastnosti F.t.] Nechť $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom pro $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$

(1) $f^{\vee}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$

(2) $\overline{f^{\vee}}(\xi) = \widehat{\overline{f}}(\xi)$, $\overline{\widehat{f}}(\xi) = \overline{f}^{\vee}(\xi)$

(3) $\widehat{f}(\xi-\eta)=\big[\widehat{e^{2\pi i(x,\eta)}f(x)}\big](\xi)$, $\eta\in\mathbb{R}^n$ pevné
(4) $\widehat{f(x-z)}(\xi)=e^{-2\pi i(\xi,z)}\widehat{f}(\xi)$, $z\in\mathbb{R}^n$ pevné
(5) $\widehat{f(\varepsilon x)}(\xi)=\frac{1}{|\varepsilon|^n}\widehat{f}(\xi/\varepsilon)$ pro $\varepsilon\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; obecněji pro regularní matici $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ platí:

$$[\widehat{f(Ax)}](\xi)=\frac{1}{\det A}\widehat{f}(A^{-T}\xi)$$

kde $A^{-T}=(A^{-1})^T$.

Definice. Funkce $f(x)$ se nazve radiálně symetrická, pokud $f(x)$ závisí jen na $|x|$ (=norma x). Ekvivalentně: $f(Qx)=f(x)$ pro libovolné otočení Q kolem počátku.

Věta 24.2. [Zachování symetrie při F.t.] Nechť $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ je sudá (resp. lichá resp. radiálně symetrická.) Potom $\widehat{f}$ má stejnou vlastnost.

Značení. Prostory funkcí $f(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$.
- $L^p(\mathbb{R}^n)$ ... L^p-integrovatelné, $\|f\|_{L^p}=\big[\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,dx\big]^{1/p}$
- $C_b(\mathbb{R}^n)$ ... spojité a omezené, $\|f\|_{C_b}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|$
- $C_0(\mathbb{R}^n)$ ... spojité s limitou 0 v nekonečnu:

$$C_0(\mathbb{R}^n)=\{f\in C_b(\mathbb{R}^n):\ |f(x)|\to 0 \text{ pro } |x|\to+\infty\}$$

- $C_c(\mathbb{R}^n)$ ... spojité s kompaktním nosičem:

$$C_c(\mathbb{R}^n)=\{f\in C(\mathbb{R}^n):\exists R>0 \text{ t.ž. } f(x)=0 \text{ pro } |x|>R\ \}$$

Platí inkluze: $C_c\subset C_0\subset C_b\subset L^\infty$ a $C_c\subset L^1$.

Věta 24.3. [F.t. mezi prostory L^1 a C_b.] $\mathcal{F}$ je spojité lineární zobrazení z $L^1(\mathbb{R}^n)$ do $C_b(\mathbb{R}^n)$ a platí

$$\|\widehat{f}\|_{C_b}\le\|f\|_{L^1}\,.$$

Věta 24.4. [Vztah F.t. a derivace.]
(1) Nechť $f(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap C_0(\mathbb{R}^n)$ a $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap C(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi)=2\pi i\xi_j\widehat{f}(\xi)\,.$$

(2) Nechť $f(x)$, $x_jf(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\frac{\partial\widehat{f}}{\partial\xi_j}(\xi)=\big[-\widehat{2\pi i x_jf(x)}\big](\xi)\,.$$

Názorně řečeno: derivace f dle x_j odpovídá násobení $\widehat{f}$ ($2\pi i$ krát) ξ_j. Analogicky: derivace $\widehat{f}$ dle ξ_j odpovídá násobení ($-2\pi i$ krát) x_j.

Příklad. Připomeňme, že laplacián $\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$. Potom platí:

$$\big[\widehat{\Delta u(x)}\big](\xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u}(\xi)\,.$$

Tvrzení. [5] [Hustota hladkých funkcí v L^p.] Pro libovolné $p \in [1, \infty)$ je množina $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ hustá v $L^p(\mathbb{R}^n)$, tj.

$$\Big(\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)\Big)\Big(\forall \varepsilon > 0\Big)\Big(\exists \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\Big)\big[\|f - \phi\|_{L^p} < \varepsilon\big]$$

Poznámky.
- „hlubší“ tvrzení o Lebesgueově integrálu.
- důsledek (fakticky ekvivalentní): ke každé funkci $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ existuje posloupnost funkcí $f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tak, že $f_n \to f$ v normě $L^p(\mathbb{R}^n)$.
- pozor: neplatí pro $p = \infty$.

Věta 24.5. [Limita F.t. v nekonečnu.] Nechť $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom $\widehat{f}(\xi) \to 0$ pro $|\xi| \to \infty$.

Definice. Pro $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definujeme *nosič funkce* $\operatorname{supp} f$ jako uzávěr množiny

$$\{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) \neq 0\}\,.$$

Ekvivalentně: je to nejmenší uzavřená množina K taková, že $f = 0$ mimo K.

Věta 24.6. [O nosiči Fourierovy transformace.] Nechť $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ je spojitá a má omezený nosič. Nechť $\widehat{f}$ má omezený nosič. Potom $f(x) \equiv 0$ v $\mathbb{R}$.

Problém. Chceme prostor funkcí X tak, že $\mathcal{F} : X \to X$, v ideálním případě vzájemně jednoznačně.
Předchozí věta ukazuje, že funkce s omezeným nosičem nejsou vhodný kandidát. Podobně se ukazuje, že $\mathcal{F}L^1 \not\subset L^1$ (viz čtvercová funkce výše).
Vhodným kandidátem se ukáže Schwartzův prostor definovaný níže, a později též prostor L^2.

Definice. Multiindexem nazývám n-tici čísel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, kde $\alpha_j \geq 0$ jsou celá. Číslo $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ nazývám výška (stupeň) multiindexu. Pro funkci $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definuji

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\,.$$

[5] Bez důkazu.

Pro vektor $x \in \mathbb{R}^n$ definuji

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \,.$$

Příklady. Nechť $\alpha = (1,0,2)$. Potom

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_1 \partial x_3^2} \,, \qquad x^\alpha = x_1 x_3^2 \,.$$

Zobecnění Věty 24.4. (1) Nechť $D^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$ pro každý multiindex $|\alpha| \le k$. Potom

$$[D^\alpha f]^\frown(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi) \qquad \forall |\alpha| \le k \,.$$

(2) Nechť $x^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pro každý multiindex $|\alpha| \le k$. Potom

$$\big[D^\alpha \widehat{f}\,\big](\xi) = \big[\widehat{(-2\pi i x)^\alpha f(x)}\big](\xi) \qquad \forall |\alpha| \le k \,.$$

Definice. Schwartzův prostor (prostor rychle klesajících funkcí) definujeme jako

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \big\{ f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ x^\alpha D^\beta f(x) \ \text{ omezená pro } \ \forall\ \alpha,\, \beta \big\} \,.$$

Lemma 24.1. [Integrace radiálních funkcí.] Nechť $f(|x|) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je dána. Potom

$$\int_{P(0;r,R)} f(|x|)\, dx = \kappa_{n-1} \int_r^R f(r) r^{n-1}\, dr \,,$$

kde κ_{n-1} je $(n-1)$-rozměrná míra množiny $S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ |x| = 1\}$.

Důsledky. ① $\int_{|x|<1} \frac{dx}{|x|^p} < \infty$, právě když $p < n$.
② $\int_{|x|>1} \frac{dx}{|x|^p} < \infty$, právě když $p > n$.

Věta 24.7. [Základní vlastnosti $\mathscr{S}$.]
(1) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneqq \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$
(2) $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$, $\forall p \ge 1$
(3) $f(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \implies x^\alpha f(x),\, D^\alpha f(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\forall \alpha$

Definice. Funkce $\exp(-\pi|x|^2)$ se nazývá gaussián.

Lemma 24.2. [F.t. gaussiánu.] Platí

$$\big[\,\widehat{\exp(-\pi|x|^2)}\big](\xi) = \exp(-\pi|\xi|^2) \,.$$

Věta 24.8. [F.t. a prostor $\mathscr{S}$.] $\mathcal{F}\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definice. Pro $f(x)$, $g(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definuji konvoluci

$$[f * g](x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy \qquad x \in \mathbb{R}^n\,,$$

má-li integrál vpravo smysl.

Věta 24.9. [6] [Vlastnosti konvoluce.]
(1) Komutativita: $[f * g](x) = [g * f](x)$ pro $\forall x$.
(2) Nechť $f(x)$, $g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom $[f * g](x)$ má smysl pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ a platí odhad

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}\,.$$

(3) Nechť p, q, $r \in [1, \infty]$ jsou takové, že $1/p + 1/q = 1 + 1/r$. Nechť $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g(x) \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Potom $[f * g](x)$ má smysl pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ a platí odhad

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}\,.$$

Věta 24.10. [Vztah F.t. a konvoluce.] Nechť $f(x)$, $g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\,\widehat{g}(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n\,.$$

Poznámky. Diracova funkce $\delta(x)$ je charakterizována následující vlastností: $\delta(x) = 0$ pro $\forall x \neq 0$, avšak $\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\,dx = 1$.
Prostory funkcí nám dosud známé (spojité, integrovatelné funkce) takovouto funkci NEOBSAHUJÍ. To je jeden z důvodů, proč zavádět i obecnější prostory (např. prostor distribucí.)
Podívejme se (čistě formálně) na další vlastnosti $\delta(x)$. Pro každou spojitou funkci $f(y)$ platí

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\delta(y)\,dy = f(0)\,.$$

Tudíž

$$[f * \delta](x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\delta(y)\,dy = f(x-y)|_{y=0} = f(x)\,,$$

neboli $f * \delta = f$. Fourierova transformace Diraca je

$$\widehat{\delta}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-2\pi i(\xi,x)}\,\delta(x)\,dx = 1\,.$$

[6] Bez důkazu třetí části.

Vzhledem k Větě 24.5. opět vidíme, že $\delta(x) \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 24.3. [Aproximace Diracovy funkce.] Nechť $f(x) \in C_b(\mathbb{R}^n)$, nechť $\varphi(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$. Označme $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(\varepsilon^{-1}x)$. Potom

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} [f * \varphi_\varepsilon](x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n .$$

Věta 24.11. [O inverzi F.t.] Nechť $f(x) \in L^1 \cap C_b(\mathbb{R}^n)$ je taková, že $\widehat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom $[\hat{f}(\xi)]^\vee(x) = f(x)$ a $[f^\vee(\xi)]^\frown(x) = f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$.

Důsledek. F. t. je vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ na $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Motivace. Dalším cílem je nyní zavést $\mathcal{F}$ na prostoru $L^2(\mathbb{R}^n)$. Připomeňme, že

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \Big\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : \ f \text{ je měřitelná, } \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\,dx < \infty \Big\} .$$

Na tomto prostoru definujeme skalární součin a normu takto:

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\,dx , \tag{1}$$

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\,dx \right\}^{1/2} . \tag{2}$$

K hlubším vlastnostem patří: $L^2(\mathbb{R}^n)$ je úplný, a množina $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ je v něm hustá.

Lemma 24.4. [O přehození F.t.] Nechť $f(x)$, $g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)\,dx , \quad \int_{\mathbb{R}^n} f^\vee(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g^\vee(x)\,dx .$$

Věta 24.12. [Plancherelova rovnost.] Nechť $f(x)$, $g(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\,d\xi .$$

Jinými slovy, $\mathcal{F}$ zachovává skalární součin v $L^2(\mathbb{R}^n)$, speciálně zachovává normu, tj. $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$ pro $\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Věta 24.13. [Zavedení F.t. v L^2.] Existuje lineární zobrazení $\mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ takové, že
(1) $\mathcal{F}_2 f = \mathcal{F} f$ pro $\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$
(2) $\mathcal{F}_2$ je izomorfismus $L^2(\mathbb{R}^n)$ na sebe, tj. vzájemně jednoznačné zobrazení, zachovávající normu a skalární součin.

Poznámka. Jak prakticky počítat $\mathcal{F}_2$? Lze dokázat, že pro dané $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ existují $R_n \to \infty$ taková, že pro skoro všechna ξ je

$$\mathcal{F}_2 f(\xi) = \lim_{n\to\infty} \int_{|x|<R_n} \mathrm{e}^{-2\pi i(x,\xi)} f(x)\, dx\,.$$

Speciálně odtud plyne, že pro $f \in L^1 \cap L^2$ je $\mathcal{F}_2 f = \mathcal{F} f$. Nadále tedy budeme psát prostě $\mathcal{F} f$ či $\hat{f}$ místo $\mathcal{F}_2 f$.

Poznámky. "Principem neurčitosti" rozumíme, zhruba řečeno, pozorování, že čím je f „koncentrovanější", tím je $\hat{f}$ „rozptýlenější", a naopak: koncentrovanost $\hat{f}$ nutně implikuje rozptýlenost f.
Mnohá z výše dokázaných tvrzení lze chápat jako jisté vyjádření principu neurčitosti. Všimněme si několika příkladů.
① Označ $f_\lambda(x) = \lambda^{-n/2} f(x/\lambda)$, kde $\lambda > 0$. Pozoruji, že $\|f_\lambda\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$. Přitom tato operace koncentruje ($\lambda \to 0$) nebo rozptyluje ($\lambda \to \infty$). Z Věty 24.1.(5) vidíme, že $\widehat{[f_{1/c}]} = [\widehat{f}]_c$.
② Větu 24.6. lze interpretovat tak, že přílišná koncentrovanost f implikuje nekonečnou rozptýlenost $\hat{f}$.
③ Krajní případ: Dirac (dokonale koncentrovaná funkce) se transformuje na 1 (dokonale rozptýlená funkce.)
④ Definujeme operátory (pro jednoduchost na prostoru $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$) $X : f(x) \mapsto x f(x)$, a $D : f(x) \mapsto \frac{1}{2\pi i} f'(x)$. Máme

$$\|Xf\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 x^2\, dx\,,$$

což v jistém smyslu měří rozptýlenost f od počátku. Protože $\widehat{Df} = \xi \hat{f}(\xi)$, je

$$\|Df\|_{L^2}^2 = \|\widehat{Df}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(\xi)|^2 \xi^2\, d\xi\,,$$

tudíž Df analogicky měří rozptýlenost $\hat{f}$ od počátku. Snadno se ověří, že X a D jsou samoadjugované, a $DXf - XDf = \frac{1}{2\pi i} f$. Kvantitativním vyjádřením principu neurčitosti je následující tvrzení:

Věta 24.14. [Heisenbergův princip neurčitosti.] Nechť $f(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, a $\|f\|_{L^2} = 1$. Potom

$$\|Xf\|_{L^2} \|Df\|_{L^2} \geq \frac{1}{4\pi}\,.$$

Rovnost nastává, právě když f je (vhodně škálovaný) gaussián.

25. Teorie distribucí.

Motivační poznámky. Dosavadní chápání funkce: ,,bodové", tj. přiřazení $x \mapsto f(x)$ nedostačuje – neexistence singulárních objektů (Dirac). Problémy s ,,bodovým" pojetím derivace: není vždy definována, neměří správně velikost nespojitosti, ...

Předběžné úvahy. [Dualita, funkcionál.] Pro f, $g \in L^2(\Omega)$ je definováno

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx$$

Tento výraz lze různě zobecňovat, přičemž f se zlepšuje: $L^\infty(\Omega)$, $C_c(\Omega)$, ..., zatímco g se zhoršuje (zobecňuje): $L^1(\Omega)$, míra na Ω, ...
Definice: je-li X (normovaný) vektorový prostor, pak množinu všech spojitých lineárních zobrazení $F : X \to \mathbb{R}$ nazýváme duálem X a značíme X'. Výše uvedené prostory jsou v (kanonickém) duálním vztahu v následujícím smyslu:
• je-li $T \in \big(L^2(\Omega)\big)'$ pak existuje jediné $g(x) \in L^2(\Omega)$ tak, že $T(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx$ pro každé $f(x) \in L^2(\Omega)$. (V tomto smyslu duálem k L^2 je opět L^2. Obecněji: duálem k L^p je L^q, kde $1/p + 1/q = 1$.)
• je-li $T \in \big(C_c(\Omega)\big)'$ a navíc nezáporný, pak existuje jediná Radonova míra μ na Ω taková, že $T(f) = \int_\Omega f(x)d\mu(x)$ pro každé $f(x) \in C_c(\Omega)$. (Duálem ke spojitým funkcím jsou míry.)

Pozorujeme: čím lepší (hladší) prostor, tím větší (obecnější) duál. V tomto duchu distribuce (tedy duál k C_c^∞) bude zobecnění všech L^p a prostoru měr zároveň.

Úmluva. V celé kapitole je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina.

Opakování. Pro $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definujeme nosič funkce $\operatorname{supp} f$ jako uzávěr množiny

$$\{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) \neq 0\}.$$

Ekvivalentně: nosič je nejmenší uzavřená množina K taková, že $f = 0$ na $\mathbb{R}^n \setminus K$.

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Prostor testovacích funkcí $\mathcal{D}(\Omega)$ bude totéž co $C_c^\infty(\Omega)$ výše, tj.

$$\mathcal{D}(\Omega) = \big\{\varphi(x) \in C^\infty(\Omega);\ \operatorname{supp}\varphi \text{ je kompaktní podmnožina } \Omega\ \big\}.$$

Říkáme, že funkce φ_n konvergují k nule v prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$, jestliže platí:
(i) existuje $K \subset \Omega$ kompaktní tak, že $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$ pro $\forall n$;
(ii) $D^\alpha\varphi_n(x) \rightrightarrows 0$ na K pro každý pevný multiindex α.

Obecněji, $\varphi_n \to \varphi$ v prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$, jestliže $\varphi_n - \varphi \to 0$ ve smyslu předchozí definice.

Značení. Normu v prostoru $C^k(\Omega)$ definujeme jako

$$\|\phi\|_{C^k(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \sup_{|\alpha|\le k} \left|D^\alpha \phi(x)\right|.$$

Tato norma popisuje stejnoměrnou konvergenci všech derivací až do řádu k včetně.
Pro $\varphi(x) \in C^\infty(\Omega)$ mohou být tyto normy nekonečné (např. $\phi(x) = 1/x$ v $\Omega = (0,\infty)$.) Pro $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$ jsou ovšem nutně konečné a podmínka (ii) v definici konvergence v $\mathcal{D}(\Omega)$ říká, že $\|\varphi_n(x)\|C^k(\Omega) \to 0$ pro každé k pevné.
Nalézt však jednu normu (ani metriku), která by popisovala konvergenci v $\mathcal{D}(\Omega)$, není možné – příčinou je podmínka (i).

Definice. Distribucí v Ω rozumíme spojité lineární zobrazení

$$\begin{aligned} T :&\mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \\ &\varphi \mapsto \langle T, \varphi\rangle. \end{aligned}$$

Podrobněji řečeno, požadujeme
(i) $\langle T, \varphi_1 + \varphi_2\rangle = \langle T, \varphi_1\rangle + \langle T, \varphi_2\rangle$, $\langle T, a\varphi\rangle = a\langle T, \varphi\rangle$;
(ii) $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$ implikuje $\langle T, \varphi_n\rangle \to 0$.

Množinu všech distribucí v Ω značíme $\mathcal{D}'(\Omega)$. Symbolem $\langle T, \varphi\rangle$ značíme (jak vidno výše) hodnotu distribuce T na testovací funkci φ.

Příklady. ① Je-li $f(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$, pak definujeme $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ předpisem

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

Říkáme, že T_f je regulární distribuce s hustotou f.
② Pro libovolný bod $a \in \Omega$ definujeme Diracovu distribuci δ_a předpisem

$$\langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a).$$

③ Dirac na sféře $\delta_{S_r} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ je definován jako

$$\langle \delta_{S_r}, \varphi\rangle = \int_{S_r} \varphi(x)dS(x),$$

kde $S_r = \{x \in \mathbb{R}^3;\ |x| = r\}$; integrál chápeme jako plošný 1. druhu.
④ Vzorkovací distribuce $V \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ je definována jako

$$\langle V, \varphi\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n).$$

⑤ Obecněji, každá Radonova míra μ v Ω určuje distribuci T_μ předpisem

$$\langle T_\mu, \varphi\rangle = \int_\mu \varphi(x) d\mu(x).$$

Radonova míra je „rozumná" v tom smyslu, je konečná na všech kompaktních množinách a spojité funkce jsou vůči ní měřitelné.

Poznámka. Lze dokázat, že vnoření $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ (realizované zobrazením $f \mapsto T_f$) je prosté v následujícím smyslu: jestliže f, $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ jsou takové, že distribuce T_f a T_g se rovnají, pak nutně $f(x) = g(x)$ skoro všude v Ω.

Značení. Symbolem $G \subset\subset \Omega$ značíme situaci, kdy $\overline{G}$ je kompaktní a $\overline{G} \subset \Omega$.

Poznámka. Množina $\mathcal{D}'(\Omega)$ je vektorový prostor: pro T, T_1 a $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ a $a \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\begin{aligned} \langle T_1 + T_2, \varphi\rangle &:= \langle T_1, \varphi\rangle + \langle T_2, \varphi\rangle, \\ \langle aT, \varphi\rangle &:= a\langle T, \varphi\rangle. \end{aligned}$$

Lehce se ověří, že $T_1 + T_2$ resp. aT jsou opět prvky $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definice. Nechť T_n, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Řekneme, že T_n konvergují k T ve smyslu distribucí, jestliže $\langle T_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$ pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pevné.

Analogicky: $\sum_{k=1}^\infty T_k = T$ ve smyslu distribucí, jestliže $\lim_{n\to\infty}\langle \sum_{k=1}^n T_k, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$ pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pevné.
Konečně, zobrazení $\lambda \mapsto T_\lambda$ z metrického prostoru Λ do $\mathcal{D}'(\Omega)$ je spojité, jestliže funkce $\lambda \mapsto \langle T_\lambda, \varphi\rangle$ (to je funkce z Λ do $\mathbb{R}$) je spojitá pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pevné.

Značení. Pro $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ budeme někdy psát $T = T(x)$ nebo $\langle T, \varphi\rangle = \langle T(x), \varphi(x)\rangle_x$, abychom formálně pojmenovali proměnnou $x \in \Omega$.
Ovšem pozor, $T(x)$ *neznačí* hodnotu distribuce T v bodě x; tento pojem *nelze* obecně definovat.

Definice. [Záměna proměnné v distribuci.] Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je regulární matice, nechť $b \in \mathbb{R}^n$. Označme $\tilde{\Omega} = \{Ay + b;\ y \in \Omega\}$. Potom pro $T(x) \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$ definujeme $T(Ay + b) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ předpisem

$$\langle T(Ay + b), \varphi(y)\rangle_y := \langle T(x), \frac{\varphi(A^{-1}(x - b))}{|\det A|}\rangle_x, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Poznámka. Předchozí definice je motivována vzorečkem

$$\int_\Omega f(Ay + b)\varphi(y)\, dy = \int_{\tilde{\Omega}} f(x) \frac{\varphi(A^{-1}(x - b))}{|\det A|}\, dx;$$

tj. pokud $f \in L^1_{loc}(\tilde{\Omega})$, tak pro příslušné regulární distribuce platí

$$\langle T_{f(Ay+b)}, \varphi(y)\rangle_y = \langle T(x), \frac{\varphi(A^{-1}(x-b))}{|\det A|}\rangle_x.$$

Příklady. ① $\delta_0(x-b) = \delta_b(x)$
② $\delta_0(ax) = a^{-1}\delta_0(y)$, $a > 0$
③ obecněji $\delta_c(ax+b) = a^{-1}\delta_{(c-b)/a}(x)$, $a > 0$.

Lemma 25.1. [O spojitosti duálního zobrazení.] Nechť $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, nechť $\Phi : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\widetilde{\Omega})$ je spojité, lineární zobrazení. Definujme $\Phi' : \mathcal{D}'(\widetilde{\Omega}) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ předpisem

$$\langle \Phi'(T), \varphi\rangle := \langle T, \Phi(\varphi)\rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Potom Φ' je spojité lineární zobrazení; speciálně $\Phi'(T) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ pro každé $T \in \mathcal{D}'(\widetilde{\Omega})$.

Důsledek. Při značení předchozí definice je $T(x) \mapsto T(Ay+b)$ spojité lineární zobrazení z $\mathcal{D}'(\widetilde{\Omega})$ do $\mathcal{D}'(\Omega)$. Speciálně $T(Ay+b)$ je distribuce v Ω.

Opakování. Je-li $F(x) \in C$ na nějakém okolí $\overline{M}$, kde $M \subset \mathbb{R}^n$ je „rozumná“ oblast, máme Gaussovu větu:

$$\int_M \frac{\partial F}{\partial x_j}\, dx = \int_{\partial M} F\nu_j \, dS;$$

vpravo se integruje dle ,,plošné“, tj. v obecném případě (n-1)-rozměrné míry přes hranici M, $\nu = (\nu_1, \dots \nu_n)$ je vnější normála.
Volbou $F = uv$, kde u, $v \in C^1$ na nějaké otevřené $\mathcal{O} \supset \overline{M}$, dostáváme vzoreček pro integraci per-partes v $\mathbb{R}^n$:

$$\int_M \frac{\partial u}{\partial x_j} v\, dx = \int_{\partial M} uv\nu_j\, dS - \int_M u\frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx.$$

Lemma 25.2. [O přehození derivace.] Nechť $f(x) \in C^m(\Omega)$, nechť $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$. Potom

$$\int_\Omega (D^\alpha f)\varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f D^\alpha \varphi\, dx$$

pro každý multiindex $|\alpha| \le m$.

Definice. Nechť $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, nechť α je libovolný multiindex. Potom definujeme distribuci $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ předpisem $\varphi \mapsto \langle T, (-1)^\alpha D^\alpha \varphi\rangle$.

Věta 25.1. [Spojitost distributivní derivace.] Pro libovolný multiindex α je D^α spojité lineární zobrazení z $\mathcal{D}'(\Omega)$ do $\mathcal{D}'(\Omega)$; speciálně $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ pro každé α.

Poznámka. Symbol D^α užíváme jak pro klasickou (bodovou) derivaci, tak pro derivaci ve smyslu distribucí. Smysl je jasný z kontextu. – Díky Lemmatu 25.2 víme, že pro hladkou funkci f platí $D^\alpha T_f = T_{D^\alpha f}$, tj. značení je konzistentní.

Příklady. ① $\frac{d}{dx}Y = \delta_0$, kde $Y(x)$ je Heavisideova funkce
② $\frac{d}{dx}\ln|x| = \text{v.p.}\frac{1}{x}$, kde

$$\langle \text{v.p.}\frac{1}{x}, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

tj. integrál počítáme ve smyslu hlavní hodnoty.

Poznámky. Mnohdy se stává, že $f(x) \notin L^1(\Omega)$ kvůli problémům v okolí jistého bodu x_0 (singularita, nekonečno). V takovém případě se můžeme pokusit vypočíst integrál jako

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\Omega_\varepsilon} f(x)\,dx$$

kde $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus U(x_0,\varepsilon)$. Pokud tato limita existuje, nazýváme jí integrálem ve smyslu hlavní hodnoty (fr. „la valeur principale“) a značíme

$$\text{v.p.}\int_\Omega f(x)\,dx$$

(Z Věty 18.9, část (3) minulého semestru plyne, že pokud $f(x) \in L^1(\Omega)$, nedává tato definice nic nového.)

Příklady. ① $1/x \notin L^1(-1,2)$ (singularita v počátku), leč

$$\text{v.p.}\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{(-1,2)\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)}\frac{dx}{x} = \int_1^2\frac{dx}{x} = \ln 2\,.$$

② $\sin(x)/x \notin L^1(0,\infty)$ (problém v okolí $+\infty$), leč můžeme spočítat

$$\text{v.p.}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{(0,\infty)\setminus U(\infty,\varepsilon)}\frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{1/\varepsilon}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

- tj. de facto počítám integrál jako Newtonův.

Opakování. Funkce $f(x) : (a, b) \to \mathbb{R}$ je po částech C^1, jestliže existují body x_j, $j = 1, \dots N$ takové, že f a f' jsou spojité všude mimo x_j, a navíc v bodech x_j mají jednostranné vlastní limity.

Lemma 25.3. [Derivace po částech C^1 funkce.] Nechť $f(x)$ je po částech C^1 v intervalu (a, b); nechť množina bodů nespojitosti $\{x_j\}_j$ nemá v (a, b) hromadný bod. Potom

$$\frac{d}{dx} T_f = T_{f'} + \sum_j \big\{ f(x_j+) - f(x_j-) \big\} \delta_{x_j},$$

kde f' je bodová derivace f.

Příklad. Nechť $f(x) = (\pi - x)/2$ pro $x \in (0, 2\pi)$ a dále 2π-periodicky. Rozvojem do Fourierovy řady máme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$$

platí v L^2, a tedy ve smyslu distribucí. Derivací dle x máme

$$-\frac{1}{2} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \pi \delta_{2\pi l}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx)$$

což lze převést (záměnou x za $2\pi x$) na

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \delta_l(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \cos(2k\pi x)$$

Aplikace. Uvažujme úlohu tvaru

$$\mathscr{D}[u] = f, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

kde $\mathscr{D}$ je diferenciální operátor s konstantními koeficienty.

Definice. Funkce U se nazývá fundamentálním řešením (též Greenovou funkcí) úlohy (3), jestliže $\mathscr{D}[U] = \delta_0$.

Motivace. Z vlastností konvoluce plyne, že

$$\mathscr{D}[U * f] = \mathscr{D}[U] * f = \delta_0 * f = f.$$

Tedy: známe-li fundamentální řešení, umíme řešit (3) pro libovolnou pravou stranu; formálně zapsáno $\mathscr{D}^{-1} = U*$.

Příklady.
① $u'' = f \dots U = x^+ = xY(x)$
② $u' + au = f \dots U = e^{ax}Y(x)$
③ $-\Delta u = f$ v $\mathbb{R}^n$. Potom fundamentálním řešením je funkce

$$\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi}\ln|x|, \qquad n = 2,$$

respektive

$$\Phi(x) = \frac{1}{\beta_n(n-2)}|x|^{2-n}, \qquad n \geq 3.$$

kde β_n je povrch jednotkové sféry v $\mathbb{R}^n$.
④ Fundamentálním řešením rovnice vedení tepla $\partial_t u - \Delta u = f$ je tzv. tepelné jádro

$$G(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,Y(t)$$

Opakování. Z prvního semestru víme, že pokud $f'(x) = 0$ v intervalu (a,b), je funkce $f(x)$ v tomto intervalu konstantní. Jinými slovy, derivace určuje funkci až na konstantu. Následující věta nám říká, že distributivní derivace má stejnou vlastnost.

Věta 25.2.[7] [O distribuci s nulovou derivací.] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, souvislá množina. Nechť $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je taková, že $\frac{\partial}{\partial x_j}T = 0$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$, pro $j = 1,\dots,n$. Potom existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $T = T_c$.

Definice. Nechť $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, nechť $G \subset \Omega$ je otevřená množina. Řekneme, že T je nulová v G, jestliže $\langle T, \varphi\rangle = 0$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, jejíž nosič je obsažen v G.
Řekneme, že T, $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se rovnají v otevřené množině $G \subset \Omega$, jestliže $T - S$ je nulová v G ve smyslu předchozí definice.
Definujeme nulovou množinu distribuce $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\mathcal{O}_T = \bigcup \big\{G;\ G \subset \Omega \text{ je otevřená a } T \text{ je nulová v } G\ \big\};$$

nosič distribuce jako

$$\operatorname{supp} T = \Omega \setminus \mathcal{O}_T.$$

Definice. Jestliže $f \in C^\infty(\Omega)$ a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definujeme distribuci fT předpisem

$$\langle fT, \varphi\rangle = \langle T, f\varphi\rangle, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

[7] Důkaz pouze pro $n = 1$.

Příklady. ① $\operatorname{supp}\delta_a = \{a\}$. Obráceně lze ukázat: je-li T distribuce taková, že $\operatorname{supp} T = \{a\}$, je T nutně tvaru $\sum_{j=1}^{N} c_j D^{\alpha_j}\delta_a$.
② Příklady součinu: $x\delta_0 = 0$, $x(\text{v.p.}\frac{1}{x}) = T_1$.

Poznámka. Definovat obecně součin dvou distribucí T, S *nelze*. (Tzv. Schwartzův výsledek o nemožnosti.)

Poznámka. Dalším cílem je definovat Fourierovu transformaci distribucí. Lemma 24.4. nám říká, v jazyce distribucí, že

$$\langle T_{\hat{f}}, \varphi\rangle = \langle T_f, \hat{\varphi}\rangle$$

Nabízí se proto definovat Fourierovu transformaci distribuce T jako

$$\langle \hat{T}, \varphi\rangle = \langle T, \hat{\varphi}\rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Je zde ovšem háček: díky Větě 24.6. víme, že pokud $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ a také $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, je už nutně $\varphi = 0$. Řešením je nahradit $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ prostorem $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Tím získáme prostor tzv. *temperovaných distribucí*, na kterém vše už funguje dobře.

Definice. Schwartzův prostor „rychle klesajících funkcí“ definujeme jako

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ x^\alpha D^\beta \varphi(x) \ \text{ omezená pro } \ \forall\ \alpha,\ \beta\right\}.$$

Řekneme, že $\varphi_n \to 0$ v $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, jestliže $x^\alpha D^\beta \varphi_n(x) \rightrightarrows 0$ v $\mathbb{R}^n$ pro všechny multiindexy α, β.

Věta 25.3. [Spojitost ve Schwartzově prostoru.]

1. $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \implies \varphi_n \to 0$ v $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$
2. zobrazení $\varphi(x) \mapsto x^\alpha\varphi(x)$ a $\varphi(x) \mapsto D^\beta\varphi(x)$ jsou spojitá z $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ do $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$
3. $\mathcal{F}$ je lineární, spojité, vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

Definice. Temperovanou distribucí v $\mathbb{R}^n$ rozumíme spojité, lineární zobrazení

$$\begin{aligned} T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) &\to \mathbb{C}, \\ \varphi &\mapsto \langle T, \varphi\rangle. \end{aligned}$$

Prostor temperovaných distribucí značíme $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Konvergencí $T_n \to T$ v $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ rozumíme, že $\langle T_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$ pro každé $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ pevné.

Poznámky. ① $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, neboli temperovaná distribuce je distribuce.
② Leč ne každá distribuce je temperovaná distribuce. Například funkce $f(x) = \exp(2x^2)$ je lokálně integrovatelná, tedy $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, avšak $T_f \notin \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.
③ Lze dokázat: pokud $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pro nějaké p, tedy $f(x)$ je *globálně* integrovatelná, pak už $T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Obecněji, pokud $f(x)$ je měřitelná funkce a existuje $N > 0$ takové, že funkce $(1+|x|^2)^N|f(x)|$ je omezená, pak $T_f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. (Takové funkce f se nazývají *pomalu rostoucí* nebo též *moderované* funkce.)
Také distribuce s kompaktním nosičem jsou temperované (přesněji řečeno, lze je přirozeně ztotožnit s temperovanou distribucí).

Lemma 25.1S.[8] Nechť $\Phi : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ spojité, lineární zobrazení. Definujeme duální zobrazení $\Phi' : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ jako

$$\langle \Phi'(T), \varphi \rangle = \langle T, \Phi(\varphi) \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Potom Φ' je spojité, lineární zobrazení; speciálně $\Phi'(T) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ pro každé $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$

Poznámky. Pomocí předchozího lemmatu se lehce ověří, že následující operace jsou korektně definované pro libovolnou temperovanou distribuci $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$:
① Derivace $D^\alpha T$, kde

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = \langle T, (-1)^\alpha D^\alpha \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

② Záměna proměnné $T(Ax + b)$, kde

$$\langle T(Ay + b), \varphi(y) \rangle_y := \langle T(x), \frac{\varphi(A^{-1}(x-b))}{|\det A|} \rangle_x, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

③ Součin ωT, kde ω je nekonečně hladká, pomalu rostoucí funkce: klademe

$$\langle \omega T, \varphi \rangle = \langle T, \omega \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Definice. Nechť $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ je temperovaná distribuce. Potom definujeme její Fourierovu transformaci $\hat{T} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ jako

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Příklady. ① $\widehat{\delta_a} = \exp(-2\pi i a \xi)$; speciálně $\widehat{\delta_0} = 1$.

[8] Bez důkazu.

② $\widehat{\left(\text{v.p.}\frac{1}{x}\right)} = -i\pi \operatorname{sgn} x$

Věta 25.4. [F.t. na prostoru $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.] Fourierova transformace je lineární, spojité, vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ na sebe.

Poznámka. Pro $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ definujeme *inverzní Fourierovu transformaci* $T^\vee \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ předpisem

$$\langle T^\vee, \varphi \rangle = \langle T, \varphi^\vee \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Platí též, že $T \mapsto T^\vee$ je lineární, spojité, vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ na sebe. Dále $\big(\widehat{T}\big)^\vee = \widehat{T^\vee} = T$ pro každé $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

* **Věta 25.5.** Nechť $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Potom:

1. $\check{T}(x) = \hat{T}(-x)$
2. $\overline{\check{T}} = \hat{\overline{T}}$, $\overline{\hat{T}} = \check{\overline{T}}$
3. $\hat{T}(y-a) = \big[\exp(2\pi i(a,x))T(x)\big]\hat{}\,(y)$
4. $\big[T(x-a)\big]\hat{}\,(y) = \exp(-2\pi i(a,y))\hat{T}(y)$
5. $\big[T(\varepsilon x)\big]\hat{}\,(y) = |\varepsilon|^{-n}\hat{T}(\varepsilon^{-1}y)$
6. Je-li T sudá (lichá, radiálně symetrická), má $\hat{T}$ stejnou vlastnost.
7. $\big[D^\alpha T\big]\hat{}\,(y) = (2\pi i y)^\alpha \hat{T}(y)$
8. $D^\beta \hat{T}(y) = \big[(-2\pi i x)^\beta T(x)\big]\hat{}\,(y)$

Příklady. ① $\big[\exp(2\pi i(a,x))\big]\hat{} = \delta_a$; odsud pak

$$\big[\cos(b,x)\big]\hat{} = \frac{1}{2}\big(\delta_{b/2\pi} + \delta_{-b/2\pi}\big)$$
$$\big[\sin(b,x)\big]\hat{} = \frac{1}{2i}\big(\delta_{b/2\pi} - \delta_{-b/2\pi}\big)$$

② Pro Heavisideovu funkci Y platí:

$$\hat{Y}(x) = \frac{1}{2\pi i}\big(\text{v.p.}\frac{1}{x}\big) + \frac{1}{2}\delta_0(x)$$

Poznámky. Nechť $f(x) : \Omega_1 \to \mathbb{R}$, $g(y) : \Omega_2 \to \mathbb{R}$. Potom definuji tenzorový součin $f \otimes g$ jakožto funkci z $\Omega_1 \times \Omega_2$ do $\mathbb{R}$ předpisem

$$\big(f \otimes g\big)(x,y) = f(x)g(y).$$

Jsou-li f, g lokálně integrovatelné na Ω_1, Ω_2, je také $f \otimes g$ lokálně integrovatelná na $\Omega_1 \times \Omega_2$ a pro příslušnou regulární distribuci platí

$$\begin{aligned}\langle T_{f\otimes g}, \varphi\rangle &= \iint_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x)g(y)\varphi(x,y)dxdy \\ &= \int_{\Omega_1} f(x)\left(\int_{\Omega_2} g(y)\varphi(x,y)dy\right)dx \\ &= \int_{\Omega_2} g(y)\left(\int_{\Omega_1} f(x)\varphi(x,y)dx\right)dy\end{aligned}$$

díky Fubiniho větě. Druhý a třetí řádek lze také napsat jako

$$\langle T_f(x), \langle T_g(y), \varphi(x,y)\rangle\rangle \qquad \text{respektive} \qquad \langle T_g(y), \langle T_f(x), \varphi(x,y)\rangle\rangle.$$

To motivuje následující definici.

Definice. [Tenzorový součin distribucí.] Nechť $T(x) \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, nechť $S(y) \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$, kde $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené množiny. Pak definujeme distribuci $T \otimes S \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ předpisem

$$\langle T \otimes S, \varphi\rangle = \langle T(x), \langle S(y), \varphi(x,y)\rangle\rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

Poznámka. Nebudeme ověřovat, že se jedná o korektně definovanou distribuci. Lze také ukázat, že takto definovaný součin má očekávané vlastnosti.

Závěrečné poznámky. Konvoluce distribucí. Aplikace při řešení diferenciálních rovnic. Fundamentální řešení.