poslední úprava 18. května 2023

15. Variační počet.

Motivační úlohy. ① Najděte nejkratší křivku spojující dva body.
② Jaký tvar zaujme lano předepsané délky, zavěšené mezi danými body?
③ Najděte největší plochu, ohraničenou křivkou dané délky (tzv. izoperimetrická úloha.)

Terminologická poznámka. Zobrazení: obecný pojem, speciální případy jsou: funkce - zobrazení z $\mathbb{R}^N$ (nebo $\mathbb{C}$) do $\mathbb{R}^M$ (nebo $\mathbb{C}$). Funkcionál - zobrazení z X do $\mathbb{R}$, kde X je prostor nekonečné dimenze. Operátor - zobrazení z X do Y, kde X, Y jsou prostory nekonečné dimenze.

Opakování. X se nazve normovaný prostor, jestliže X je vektorový prostor (nad $\mathbb{R}$), a každému $x \in X$ je přiřazena norma $\|x\|$ tak, že platí: (i) $\|x\| = 0$ právě když $x = 0$, (ii) $\|ax\| = |a|\|x\|$, (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$; pro každé x, $y \in X$, $a \in \mathbb{R}$. Definujeme okolí

$$
\begin{aligned}
U(x_0, \delta) &= \big\{x \in X;\ \|x - x_0\| < \delta\big\} \\
P(x_0, \delta) &= U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}
\end{aligned}
$$

Funkcionál $\Phi(x) : \mathcal{M} \subset X \to \mathbb{R}$ je spojitý, pokud

$$\big(\forall x_0 \in \mathcal{M}\big)\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\Big[x \in U(x_0, \delta) \cap \mathcal{M} \implies |\Phi(x) - \Phi(x_0)| < \varepsilon\Big]$$

Definice. Nechť $\Phi(x) : \mathcal{M} \subset X \to R$, kde X je normovaný prostor.

1. Nechť x_0, $h \in X$. Limita

   $$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[\Phi(x_0 + th) - \Phi(x_0)\right]$$

   se nazývá *Gâteauxův diferenciál* Φ v bodě x_0 ve směru h. Značí se $D\Phi(x_0; h)$.

   Ekvivalentně je $D\Phi(x_0; h) = \varphi'(0)$, kde $\varphi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována $\varphi(t) = \Phi(x_0 + th)$.

2. Nechť $x_0 \in X$. Spojité lineární zobrazení $A : X \to R$, splňující

   $$\Phi(x_0 + h) = \Phi(x_0) + A(h) + o(\|h\|), \qquad h \to 0,$$

   podrobněji

   $$\frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) - A(h)}{\|h\|} \to 0, \qquad \|h\| \to 0\,,$$

   se nazývá *Fréchetův diferenciál* Φ v bodě x_0. Značí se $\Phi'(x_0)$.

Poznámky. • pro $X = \mathbb{R}^n$ je Gâteauxův diferenciál totéž co derivace ve směru; Fréchetův diferenciál totéž co totální diferenciál.
• platí: $\Phi'(x_0)$ existuje $\implies$ $D\Phi(x_0; h)$ existuje pro každé $h \in X$, a platí $D\Phi(x_0; h) = [\Phi'(x_0)](h)$.

• platí: $\Phi'(x_0)$ existuje $\implies$ $\Phi(x)$ je spojitý v bodě x_0.

***Věta 15.1.** Nechť $\Phi(x) : \mathcal{M} \subset X \to R$ má v $x_0 \in \mathcal{M}$ lokální extrém. Nechť $h \in X$ je takové, že $D\Phi(x_0; h)$ existuje. Potom $D\Phi(x_0; h) = 0$.

Definice. Nechť $k \geq 0$ celé, $a < b \in \mathbb{R}$. Definujeme

$$\begin{aligned} C^k([a,b]) &= \left\{ \tilde{y}|_{[a,b]} : \ \tilde{y} \in C^k(\mathbb{R}) \right\} ; \\ C_0^1([a,b]) &= \left\{ y \in C^1([a,b]) : \ y(a) = y(b) = 0 \right\} . \end{aligned}$$

Základní úloha variačního počtu. Nalezení extrémů funkcionálu $\Phi(y) : \mathcal{M} \subset X \to \mathbb{R}$, kde $X = C^1([a,b])$,

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx \\ \mathcal{M} &= \left\{ y \in C^1([a,b]) : \ y(a) = A, \ y(b) = B \right\} . \end{aligned} \qquad (U)$$

Prostor $C^1([a,b])$ je opatřený normou $\|y\| = \sup_{x\in[a,b]} \left\{ |y(x)| + |y'(x)| \right\}$.
Klíčovou roli nadále hraje funkce $f = f(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která funkcionál "vytváří". Budeme značit $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$.

Věta 15.2. Je dána úloha (U). Nechť $f \in C^1$, nechť $y_0 \in \mathcal{M}$, $h \in C_0^1([a,b])$ jsou libovolná. Potom existuje $D\Phi(y_0; h)$ a platí

$$D\Phi(y_0; h) = \int_a^b f_y(x, y_0(x), y_0'(x))h(x) + f_z((x, y_0(x), y_0'(x))h'(x)\, dx\,.$$

Upřesňující poznámka. V předchozí větě stačí, aby $f = f(x,y,z) \in C^1(G)$, kde $G \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená množina taková, že $(x, y_0(x), y_0'(x)) \in G$ pro každé $x \in [a,b]$.

Diracova funkce $\delta(x)$**.** Je určena vlastnostmi ① $\delta(x) = 0$ pro $\forall x \neq 0$ a ② $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)\, dx = 1$ pro $\forall \varepsilon > 0$. Odsud dále plyne, že

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x_0 + y)\delta(y)\, dy = f(x_0)$$

pro každou spojitou funkcí $f(x)$.
Interpretujeme-li pojmy ,,funkce“ a ,,integrál“ v obvyklém smyslu, pak Diracova funkce neexistuje! Lze ji však reprezentovat jako míru, distribuci (=zobecněnou funkci), nebo jednoduše jako ,,limitu“ posloupnosti funkcí, viz dále.

Definice. Nosič (support) funkce f definujeme jako

$$\operatorname{supp} f := \overline{\left\{ x; \ f(x) \neq 0 \right\}}.$$

Ekvivalentně: nosič je nejmenší uzavřená množina M taková, že $f = 0$ mimo M.

Lemma 15.1. Nechť $\varphi(x) \geq 0$ je spojitá funkce s nosičem v $[-1,1]$ taková, že $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 1$. Nechť $f(x)$ je spojitá v bodě x_0. Potom

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0+y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy = f(x_0),$$

kde $\varphi_\varepsilon(y) := \varepsilon^{-1}\varphi(y/\varepsilon)$.

Poznámka. Věta platí i za slabších předpokladů, např. φ má omezený nosič a $\int \varphi(x)\,dx$ existuje a rovná se 1.

Poznámka. Posloupnost funkcí φ_ε aproximuje Diracovu funkci δ – podobně jako posloupnost čísel, jdoucích do 0, aproximuje „nekonečně malé“ číslo: další klíčový objekt analýzy, který v běžném světě matematiky neexistuje.

Důležitá konstrukce. Shlazovací funkce (molifiér, bump function, seřezávací funkce) se definuje jako

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ C\exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & |x| < 1 \end{cases}$$

Základní vlastnosti φ:

- $\varphi(x) \geq 0$, sudá v $\mathbb{R}$
- $\varphi(x) = 0$ pro $|x| \geq 1$, $\varphi(x) > 0$ pro $|x| < 1$
- $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$
- $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 1$ (docílíme vhodnou volbou konstanty $C > 0$)

Seřezávací funkce s nosičem v $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ se dostane jako

$$\varphi_{a,\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right).$$

Lemma 15.2. [Slabá formulace diferenciální rovnice.]

1. Nechť $u \in C([a,b])$. Potom $u(x) \equiv 0$ v $[a,b]$, právě když

$$\int_a^b u(x)h(x)\,dx = 0 \qquad \forall h \in C_0^1([a,b]).$$

2. Nechť $w \in C^1([a,b])$, $v \in C([a,b])$. Potom $-w'(x) + v(x) \equiv 0$ v $[a,b]$, právě když

$$\int_a^b w(x)h'(x) + v(x)h(x)\,dx = 0 \qquad \forall h \in C_0^1([a,b]).$$

Věta 15.3. [Euler-Lagrange.] Je dána úloha (U). Nechť $y \in \mathcal{M}$ je lokální extrém, nechť navíc $y \in C^2$, $f \in C^2$. Potom y splňuje v $[a, b]$ rovnici

$$-\frac{d}{dx}\big(f_z(x, y(x), y'(x))\big) + f_y(x, y(x), y'(x)) = 0\,. \qquad (E.L.)$$

Definice. Předchozí rovnice se nazývá Euler-Lagrangeova rovnice funkcionálu Φ. Každé její řešení, náležící do $\mathcal{M}$ (tj. splňující okrajové podmínky $y(a) = A$, $y(b) = B$), nazýváme *extremálou* úlohy (U).

Příklad. $\Phi(y) = \int_0^\pi (y' + y)^2 + 2y \sin x \, dx$, $\mathcal{M} = \{y \in C^1([0, \pi]);\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 1\big\}$. E.L. rovnice je $y'' - y = \sin x$, jediná extremála $y_0(x) = \frac{\sinh x}{\sinh \pi} - \frac{1}{2} \sin x$. Elementárně lze dokázat, že y_0 je globální minimum.

Tvrzení. Nechť $f(z) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje $f''(z) > 0$ pro každé $z \in \mathbb{R}$. Nechť $L \in \mathbb{R}$ je dáno. Potom funkcionál

$$\Phi(z) = \int_a^b f(z(x))\, dx, \qquad z \in \mathcal{M}$$

$$\text{kde} \quad \mathcal{M} = \Big\{z \in C([a, b]);\ \int_a^b z(x)\, dx = L\Big\}$$

má jediné globální minimum $z(x) \equiv K$, kde $K = L/(b - a)$.